



UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Il Mapping Class Group e il Teorema di Dehn-Lickorish

CANDIDATO:
Diego Santoro

RELATORE:
Prof. Paolo Lisca

ANNO ACCADEMICO 2016/2017

Indice

Introduzione	ii
1 Nozioni preliminari	1
1.1 Risultati preliminari	3
1.2 Geometria iperbolica	5
1.3 Omotopia equivariante	9
2 Il criterio del bigono	12
2.1 I numeri di intersezione	12
2.2 Il principio di cambio di coordinate	20
3 Il Mapping Class Group e il metodo di Alexander	22
3.1 Il trucco di Alexander	22
3.2 Primi esempi di Mapping Class Groups	23
3.3 Il metodo di Alexander	27
4 Twist di Dehn	30
5 Il teorema di Dehn-Lickorish	36
5.1 Il complesso delle curve	37
5.2 La successione esatta di Birman	40
5.2.1 Fibrati	41
5.2.2 Dimostrazione del teorema	49
5.3 Generatori espliciti e caso generale	51
Bibliografia	55

Introduzione

L'argomento principale della tesi è lo studio del *mapping class group* di una superficie. Questo oggetto si incontra in diverse aree della geometria, e sin dal primo approccio al suo studio si sente la necessità di dover utilizzare una grande varietà di argomentazioni e strumenti: da quelli della topologia generale a quelli della geometria iperbolica, dalla topologia algebrica alla geometria differenziale.

Il mapping class group compare naturalmente, ad esempio, nello studio delle 3-varietà. Ogni varietà compatta e connessa di dimensione 3, infatti, si può decomporre come unione di due corpi con manici dello stesso genere incollati lungo i bordi, che consistono in S_g , la superficie di genere g . Quindi il tipo di omeomorfismo della 3-varietà dipende essenzialmente da come sono incollati i bordi, ovvero dall'automorfismo ϕ di S_g . Più precisamente, dipende dalla classe di isotopia di ϕ .

Dopo aver introdotto alcune nozioni essenziali di geometria iperbolica, viene presentato il mapping class group di una superficie S : considerato il gruppo $\text{Omeo}^+(S, \partial S)$ degli automorfismi di S che conservano l'orientazione e fissano il bordo, e dotato della topologia compatto-aperta, il mapping class group è definito come lo spazio $\pi_0(\text{Omeo}^+(S, \partial S))$, e indicato con $\text{MCG}(S)$. Quindi il mapping class group di S è lo spazio delle classi di isotopia relativa a ∂S degli automorfismi di S che ne conservano l'orientazione e ne fissano il bordo, qualora non vuoto.

Per acquisire familiarità con questo gruppo, vengono calcolati in modo diretto i mapping class groups di alcune superfici, quali la sfera, il toro, l'anello, il disco e il disco con una puntura. Nell'approcciarsi a questi primi esempi emergono alcune peculiarità, in particolare si osserva che per riuscire a determinare il carattere di un elemento del mapping class group di una superficie è sufficiente analizzare la sua azione su determinate classi di isotopia di curve. Da questa intuizione si giunge al metodo di Alexander, che fornisce un algoritmo per decidere se un dato elemento del mapping class group è l'identità, e quindi se due elementi del mapping class group coincidono.

Nella seconda parte della tesi sviluppiamo gli strumenti necessari per giungere alla dimostrazione del teorema di Dehn-Lickorish. Il suo enunciato afferma che il mapping class group di una superficie di genere g è finitamente generato.

Il primo passo è quindi quello di introdurre gli elementi che dimostreremo essere generatori di questo gruppo, chiamati twist di Dehn: indicato con T l'automorfismo di $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$

che ruota la circonferenza $\mathbb{S}^1 \times \{t\}$ di $2\pi t$, allora il twist di Dehn intorno ad una curva α in una superficie S è la mapping class che applica l'omeomorfismo T su un intorno tubolare della curva e l'identità sul resto della superficie.

Si procede dunque ad una presentazione della struttura della dimostrazione, dalla quale si evince la necessità di altri due strumenti: il *complesso delle curve* e la *successione esatta di Birman*, che sono affrontati nello specifico nell'ultimo capitolo.

L'elaborato si conclude con la dimostrazione del teorema, con un accenno ad alcuni esempi espliciti di generatori e a come affrontare il problema nel caso in cui la superficie abbia delle punture e delle componenti di bordo.

Capitolo 1

Nozioni preliminari

Nel corso della trattazione ci occuperemo esclusivamente di superfici, che per noi saranno spazi topologici T_2 secondo numerabili e localmente omeomorfi ad aperti di \mathbb{R}^2 .

Lavoreremo principalmente nella categoria **Top**, anche se in dimensione 2 le categorie **Top**, **PL** e **Diff** sono tutte equivalenti, poiché una qualsiasi superficie topologica ammette una triangolazione e ogni corpo di un complesso simpliciale può essere reso liscio in modo da risultare una superficie differenziabile (con analoghi risultati per i morfismi). Forti di questa equivalenza, ci permetteremo talvolta di confondere tra loro queste tre categorie e i concetti a loro associati. Per approfondire questo argomento si rimanda a [3] e [4].

In questo primo capitolo presentiamo dei risultati preliminari e degli strumenti che saranno utilizzati frequentemente in quanto seguirà.

Data una superficie S con curva *chiusa* intenderemo una mappa continua $\alpha : \mathbb{S}^1 \longrightarrow S$. Diremo che una curva è *semplice* se la mappa è un embedding, ovvero un omeomorfismo con l'immagine, e diremo che è *essenziale* se non è omotopa liberamente ad un punto, ad una componente di bordo o ad una puntura. Con omotopia libera si intende un'omotopia senza punto base, e una curva chiusa si dice essere omotopa ad una puntura se è omotopa liberamente al bordo di un disco con un'unica puntura. Con isotopia intenderemo, invece, un'omotopia che ad ogni tempo è un embedding.

Un arco sarà una mappa continua $\gamma : [0, 1] \longrightarrow S$ con $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$ sul bordo di S o su dei punti marcati. Un'omotopia libera F_t tra archi γ e γ' dovrà essere un arco per ogni tempo t , e in particolare gli estremi dovranno sempre giacere sul bordo e sulle punture di S , mentre in un'omotopia relativa al bordo gli estremi dovranno essere fissati.

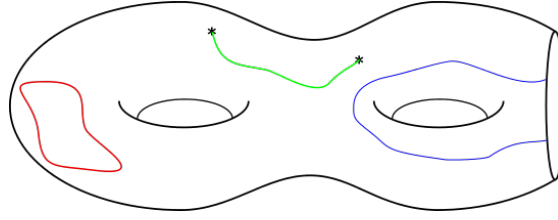


Figura 1.1: Una collezione di archi e curve su una superficie.

Se consideriamo una curva chiusa orientata α in S possiamo identificarla con un elemento di $\pi_1(S)$ fissando un punto base ed un cammino dal punto alla curva. Ovviamente tale elemento è ben definito a meno di coniugio, e lo indicheremo con abuso di notazione con $\alpha \in \pi_1(S)$.

Proposizione 1.1. *Si ha una bigezione tra le classi di coniugio non banali di elementi in $\pi_1(S)$ e le classi di omotopia libera non banali di curve chiuse ed orientate in S .*

Dimostrazione. Fissiamo un punto base $s \in S$ e un punto base $p \in \mathbb{S}^1$ e indichiamo con $[\mathbb{S}^1, S]$ l'insieme delle classi di omotopia libera di mappe da \mathbb{S}^1 in S . In queste notazioni si ha una naturale applicazione $\pi_1(S, s) \xrightarrow{\Phi} [\mathbb{S}^1, S]$ che si ottiene dimenticando il punto base.

Dimostriamo che Φ è surgettiva. Considerata una curva $\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\alpha} S$ e fissato $s' \in \alpha(\mathbb{S}^1)$ possiamo considerare un cammino γ che congiunge il punto s al punto s' . Ma allora la curva $\gamma \star \alpha \star \gamma^{-1}$ è una curva chiusa con punto base in s che è liberamente omotopa a α . Inoltre $\Phi([\alpha]) = \Phi([\beta])$ se e solo se $[\alpha]$ e $[\beta]$ sono coniugati in $\pi_1(S, s)$, e quindi Φ induce la corrispondenza biunivoca cercata.

Sia infatti $\beta = \delta \star \alpha \star \delta^{-1}$: si ha che la curva $\delta \star \alpha$ è omotopa liberamente a $\alpha \star \delta$, in quanto precomponendo la parametrizzazione di una con una rotazione di π di \mathbb{S}^1 si ottiene l'altra, e una rotazione di \mathbb{S}^1 è omotopa all'identità, e quindi α è omotopa a $\delta \star \alpha \star \delta^{-1} = \beta$.

Supponiamo invece che $\Phi[\alpha] = \Phi(\beta)$, ovvero che esista un'omotopia libera ϕ tra le due curve. Se indichiamo con h il cammino $\phi_t(p)$, e con h_t la parametrizzazione di h all'intervallo $[0, t]$ in modo che il dominio sia ancora $[0, 1]$, si ha che $h_t \star \phi_t \star h_t^{-1}$ è un'omotopia tra α e $h \star \beta \star h^{-1}$. Osservando che, poiché $\alpha(p) = s$ e $\beta(p) = s$, h è anch'essa una curva con punto base in s , si ha la tesi. \square

Dato un gruppo G diremo che un elemento $g \in G$ è *primitivo* se non esiste nessun $h \in G$ tale che $g = h^k$ con $k \in \mathbb{Z}$ e $|k| > 1$, e poiché l'essere primitivo è invariante per coniugio ha senso utilizzare questa terminologia anche per le curve su una superficie.

Analogamente diremo che una curva chiusa α è un multiplo di α' se la mappa $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ si fattorizza come nel seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{\alpha} & S \\ \downarrow \times k & & \nearrow \alpha' \\ \mathbb{S}^1 & & \end{array}$$

con $k \in \mathbb{Z}$ e $|k| > 1$, ovvero se percorre più volte la curva α' .

Ogni curva chiusa α è omotopa ad una curva liscia, e se α è semplice riusciamo ad ottenere che anche la curva liscia che l'approssima lo sia. Supporre le curve lisce ci farà comodo spesso, perché potremo parlare di trasversalità tra curve, e quindi talvolta le curve a cui faremo riferimento saranno supposte tali.

1.1 Risultati preliminari

In questa prima sezione presenteremo senza dimostrare alcuni teoremi classici che saranno basilari nel corso della tesi.

Definizione 1.2. Siano S e S' due superfici con bordo e sia $\phi : \partial S \rightarrow \partial S'$ un diffeomorfismo. Definiamo la superficie ottenuta *incollando* S e S' lungo ϕ : per costruirla consideriamo due collari $\partial S \times [0, 1)$ e $\partial S' \times [0, 1)$ intorno ai bordi di S e S' e quozientiamo lo spazio $(S \setminus \partial S) \sqcup (S' \setminus \partial S')$ identificando i punti (p, t) e $(\phi(p), 1 - t)$ per ogni $p \in \partial S$ e $t \in (0, 1)$.

Definizione 1.3. La somma connessa $S \# S'$ di due superfici orientabili S e S' è la superficie ottenuta considerando due dischi $D \subset S$ e $D' \subset S'$ e un diffeomorfismo $\phi : D \rightarrow D'$ che inverte l'orientazione, rimuovendo le parti interne dei dischi dalle due superfici e incollando le componenti di bordo così ottenute lungo $\phi|_{\partial D}$.

Osservazione 1.4. Poiché il diffeomorfismo ϕ inverte l'orientazione la superficie $S \# S'$ ottiene in modo naturale una orientazione coerente con quelle di S e S' .

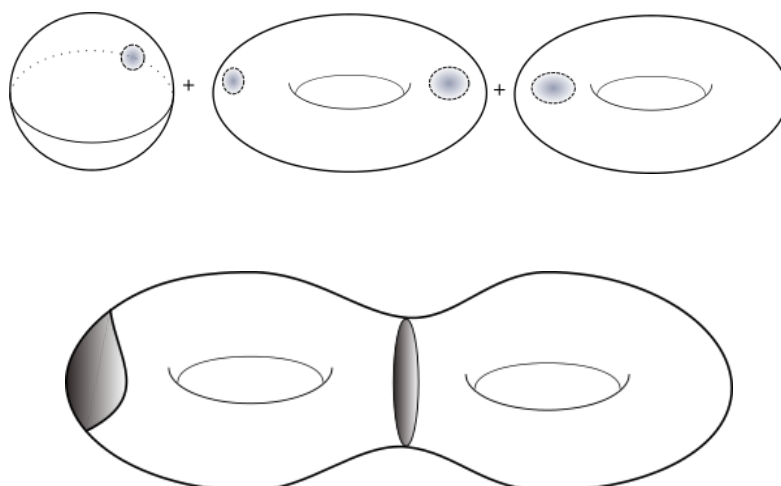


Figura 1.2: somma connessa di una sfera e due tori

Teorema 1.5. (*Classificazione delle superfici*) Ogni superficie chiusa, connessa e orientabile è omeomorfa alla somma connessa di una 2-sfera e $g \geq 0$ tori. Ogni superficie compatta, connessa e orientabile si ottiene da una superficie chiusa rimuovendo $b \geq 0$ dischi aperti con chiusure disgiunte. L'insieme dei tipi di omeomorfismo delle superfici compatte è in biezione con l'insieme $\{(g, b) \mid g, b \geq 0\}$.

Per una dimostrazione del teorema 1.5 si veda [3].

Potremo inoltre rimuovere un numero $n \geq 0$ di punti dalla superficie, rendendola non compatta; diremo in tal caso che la superficie ha n *punture* e talvolta invece di rimuovere i punti li considereremo *marcati*. Denoteremo con $S_{g,n}$ la superficie di genere g con n punture.

Ricordiamo che la *caratteristica di Eulero* di una superficie S è $\chi(S) = 2 - 2g - (b + n)$, e essendo anch'essa un invariante per omeomorfismo sono sufficienti tre quantità tra $\chi(S)$, g , n , b per determinare il tipo di omeomorfismo di S .

In generale quando riusciremo a trovare un'omotopia tra due curve, questa omotopia non sarà una isotopia. Tuttavia in alcuni casi ci farà comodo disporre di un'isotopia e quindi vogliamo trovare un modo per convertire un'omotopia in un'isotopia.

Teorema 1.6. Siano α e β due curve semplici chiuse ed essenziali su una superficie S . Allora α e β sono isotope se e solo se sono omotope.

Teorema 1.7. (*Estensione dell'isotopia*) Data una qualunque superficie S e un'isotopia tra curve $F : \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow S$ allora esiste un'isotopia $H : S \times I \rightarrow S$ tale che $H|_{S \times \{0\}}$ è l'identità e $H|_{F(\mathbb{S}^1 \times \{0\}) \times I} = F$.

Un'isotopia di una superficie tra l'identità e un altro omeomorfismo viene detta *isotopia ambiente*.

Teorema 1.8. *Sia S una superficie compatta. Allora ogni omeomorfismo è isotopo ad un diffeomorfismo.*

Teorema 1.9. *Sia S una superficie compatta, e siano f e g omeomorfismi di S omotopi che conservano l'orientazione. Allora f e g sono isotopi. Inoltre se l'omotopia è relativa al bordo, anche l'isotopia lo è.*

Le dimostrazioni di questi teoremi si possono trovare rispettivamente in [1], [5], [6] e [7].

1.2 Geometria iperbolica

Per approfondire gli argomenti trattati in questa sezione si rimanda a [2].

Su una superficie topologica, o in generale una varietà topologica, mancano gli strumenti necessari per poter parlare di angoli, lunghezze, distanze e altri concetti geometrici.

La possibilità di dotare una superficie di una struttura geometrica è una cosa di cui faremo largo uso più avanti e l'oggetto che ci permetterà di farlo è chiamato *tensore metrico*.

Definizione 1.10. Un *tensore metrico* g per una varietà differenziabile M è l'assegnazione di un prodotto scalare su ogni piano tangente T_p con $p \in M$ che dipenda in modo liscio dal punto p .

Definizione 1.11. Una varietà riemanniana M è una varietà differenziabile dotata di un tensore metrico g definito positivo in ogni punto $p \in M$.

Teorema 1.12. *In dimensione $n \geq 2$ esiste un'unica varietà riemanniana completa e semplicemente connessa con curvatura costante $1, 0$ o -1 .*

□

Definizione 1.13. Il piano iperbolico \mathbb{H}^2 è l'unica superficie riemanniana completa e semplicemente connessa con curvatura costante -1 .

I modelli del piano iperbolico che utilizzeremo sono il modello del disco e il modello del semipiano:

- il primo si ottiene considerando il disco aperto $\mathring{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \subset \mathbb{C}$ con il tensore metrico $g_z = \left(\frac{2}{1-z^2}\right)^2 g_z^E$;
- il secondo si ottiene dotando il semipiano aperto $\mathring{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\} \subset \mathbb{C}$ del tensore metrico $g_z = \frac{g_z^E}{\text{Im}(z)^2}$;

dove con g^E intendiamo il tensore metrico euclideo standard.

Osservazione 1.14. In entrambi i modelli i tensori metrici sono in ogni punto ottenuti dal tensore metrico euclideo tramite riscalamento, e quindi gli angoli coincidono con gli angoli euclidei. Si dice in questo caso che i due modelli sono conformi al modello euclideo.

Essendo il piano iperbolico completo, per il teorema di Hopf-Rinow le sue geodetiche sono definite su tutto \mathbb{R} . Nel modello del disco esse coincidono con gli archi di circonferenze (euclidee) perpendicolari a ∂D^2 , mentre in quello del semipiano risultano essere le linee verticali e le semicirconferenze con centro in \mathbb{R} .



Figura 1.3: Esempi di geodetiche nel modello del disco e del semipiano

Definiamo il bordo del piano iperbolico $\partial\mathbb{H}^2$ come l'insieme delle classi di equivalenza dei raggi geodetici, ovvero geodetiche $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{H}^2$ di velocità unitaria, considerati modulo la relazione:

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \sup_{t \in [0, +\infty)} d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) < +\infty.$$

Con questa definizione si ha che nel modello del disco $\partial\mathbb{H}^2$ coincide con ∂D^2 e si riesce ad estendere la topologia di \mathbb{H}^2 a $\overline{\mathbb{H}^2}$ in modo che coincida con la topologia del disco chiuso. Inoltre l'identificazione tra D^2 e H^2 induce un omeomorfismo tra ∂D^2 e $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, che è quindi anche esso un modello di $\partial\mathbb{H}^2$.

Definizione 1.15. Una superficie S ammette una *struttura iperbolica* se esiste su S una metrica riemanniana completa, di area finita e di curvatura costante -1 , in cui ∂S , se non vuoto, è totalmente geodetico (ovvero le geodetiche in ∂S sono geodetiche in S).

Teorema 1.16. *Sia S una superficie, eventualmente con punture o componenti di bordo. Se $\chi(S) < 0$ allora S ammette una struttura iperbolica.*

□

Il seguente teorema, la cui dimostrazione si può trovare in [8], chiarisce ulteriormente la situazione:

Teorema 1.17. *Per ogni superficie iperbolica S esiste un sottogruppo $\Gamma < Isom^+(\mathbb{H}^2)$ che agisce in modo propriamente discontinuo tale che $S \approx \mathbb{H}^2/\Gamma$.*

□

Quindi la grande importanza di \mathbb{H}^2 è dovuta al fatto che il piano iperbolico è il rivestimento universale metrico di tutte le superfici iperboliche. Inoltre grazie a questo teorema si manifesta l'utilità di approfondire e classificare le isometrie, in particolare quelle che conservano l'orientazione, di \mathbb{H}^2 .

Prima di approcciare la presentazione dei risultati relativi a queste isometrie osserviamo che nel modello del disco possiamo estendere una qualsiasi isometria del piano iperbolico $f : \mathring{D}^2 \rightarrow \mathring{D}^2$ al bordo ∂D^2 . Infatti un'isometria manda geodetiche in geodetiche e quindi si può definire in modo naturale $f([\gamma]) = [f \circ \gamma]$. Questa estensione è continua e quindi per il teorema del punto fisso di Brouwer ogni isometria di \mathbb{H}^2 fissa almeno un punto in $\overline{\mathbb{H}^2}$.

Consideriamo ora come modello del piano iperbolico il semipiano H^2 .

Proposizione 1.18. *Le isometrie che conservano l'orientazione di H^2 sono della forma $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad-bc=1$ e sono isomorfe a $\mathbb{P}SL(2, \mathbb{R})$. Le isometrie che invertono l'orientazione di H^2 sono della forma $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ con $ad-bc=-1$.*

Supponiamo che $\gamma \in Isom^+(H^2)$ abbia un punto fisso $\gamma(z_0) = \frac{az_0+b}{cz_0+d} = z_0$.

Il punto fisso è ∞ se e solo se $c=0$ (poiché $\gamma(\infty) = a/c$) e in tal caso $\gamma(z) = \frac{az}{d} + \frac{b}{d}$.

Allora γ ha al più un altro punto fisso, anch'esso in ∂H^2 , ossia $z_0 = \frac{b}{d-a}$. Se invece il

punto fisso non è ∞ , allora $c \neq 0$ e, nel caso in cui $cz_0+d \neq 0$, ossia per $z_0 \neq \frac{-d}{c}$, ci si riduce a risolvere $cz_0^2 + (d-a)z_0 - b = 0$, che quindi può avere uno o due zeri reali distinti, o due zeri complessi coniugati, di cui solo uno in H^2 .

Abbiamo dimostrato la seguente

Proposizione 1.19. *Un'isometria non banale di \mathbb{H}^2 :*

- fissa un solo punto in \mathbb{H}^2 .
- fissa due punti in $\partial \mathbb{H}^2$ e nessuno in \mathbb{H}^2 .
- fissa un punto in $\partial \mathbb{H}^2$ e nessuno in \mathbb{H}^2 .

Corollario 1.20. *Un'isometria del piano iperbolico che fissa almeno tre punti è l'identità.*

Definizione 1.21. Classifichiamo le isometrie non banali del piano iperbolico in tre classi:

- ellittiche, se fissano un solo punto in \mathbb{H}^2 .
- iperboliche, se fissano esattamente due punti in $\partial\mathbb{H}^2$ e nessuno in \mathbb{H}^2 .
- paraboliche, se fissano esattamente un punto in $\partial\mathbb{H}^2$ e nessuno in \mathbb{H}^2 .

Poiché un'isometria iperbolica fissa due punti in $\partial\mathbb{H}^2$ fissa anche l'unica geodetica che ha come estremi quei due punti. Tale geodetica viene chiamata *asse* dell'isometria.

Proposizione 1.22. *Un'isometria non banale $A \in \mathbb{P}SL(2, \mathbb{R})$ è rispettivamente ellittica, iperbolica o parabolica se e solo se $|tr A| < 2$, $|tr A| > 2$ o $|tr A| = 2$.*

Dimostrazione. Sfruttando l'isomorfismo della proposizione 1.18 si ha che l'isometria associata ad A ha un punto fisso se e solo se $\frac{az+b}{cz+d} = z$, equivalentemente se e solo se $cz^2 + (d-a)z - b = 0$.

Data la classificazione delle isometrie del piano iperbolico, per determinare il carattere di A è sufficiente conoscere il numero di soluzioni reali di questa equazione, che corrispondono ai punti fissi sul bordo. Calcolando $\Delta = (d-a)^2 + 4bc = (d+a)^2 - 4 = tr A^2 - 4$, e analizzando i rispettivi tre casi in cui $|tr A| < 2$, $|tr A| > 2$ e $|tr A| = 2$ si ha la tesi. \square

Proposizione 1.23. *Due isometrie che conservano l'orientazione di H^2 che commutano hanno gli stessi punti fissi.*

Dimostrazione. Indichiamo con S e T le due isometrie e con $Fix(S)$ e $Fix(T)$ i rispettivi punti fissi. Consideriamo $t \in Fix(T)$: poiché S e T commutano si ha $TS(t) = ST(t) = S(t) = t' \in Fix(T)$, e quindi S fissa $Fix(T)$ come insieme. Analogamente T fissa $Fix(S)$. Analizziamo allora tre casi:

- almeno una delle due isometrie è ellittica: in tal caso avrebbe un unico punto fisso in H^2 e necessariamente l'altra isometria dovrebbe fissarlo, essendo quindi ellittica anch'essa e si avrebbe quindi $Fix(S) = Fix(T)$.
- almeno una delle due è iperbolica: supponiamo T sia iperbolica e senza perdita di generalità supponiamo fissi 0 e ∞ . Allora S fissa gli stessi punti, e in tal caso avremmo concluso, oppure $S(0) = \infty$ e $S(\infty) = 0$. In quest'ultimo caso, la matrice associata ad S sarebbe della forma $M = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ e avendo traccia uguale a 0 sarebbe ellittica, ricadendo nel caso del punto precedente.
- sono entrambe paraboliche, in tal caso entrambe fisserebbero un solo elemento e quindi necessariamente $Fix(S) = Fix(T)$.

\square

Proposizione 1.24. *Sia ϕ un'isometria di \mathbb{H}^2 :*

- *se ϕ è ellittica e fissa 0 nel modello del disco allora $\phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, con $A \in O(2, \mathbb{R})$.*
- *se ϕ è parabolica e fissa ∞ nel modello del semipiano allora $\phi(x, y) = (x + b, y)$, con $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*
- *se ϕ è iperbolica e fissa 0 e ∞ nel modello del semipiano allora $\phi(x, y) = \lambda(x, y)$, con λ scalare positivo $\lambda \neq 1$.*

Per una dimostrazione si veda [2].

Osservazione 1.25. Data una qualsiasi isometria di \mathbb{H}^2 a meno di coniugio possiamo supporre di essere in uno dei tre casi della proposizione precedente. Da questo segue che se ϕ è una isometria ellittica $\inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{H}^2} d(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x})) = 0$, con il minimo assunto nel punto fisso; se ϕ è parabolica $\inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{H}^2} d(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x})) = 0$ e non c'è nessun punto in \mathbb{H}^2 che lo realizza (si realizza in $\partial\mathbb{H}^2$); se ϕ è iperbolica $\inf_{\mathbf{x} \in \mathbb{H}^2} d(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x})) > 0$ e si può dimostrare (si veda [2]) che il minimo viene raggiunto sull'asse.

Se S è una superficie iperbolica compatta sappiamo che $S \approx \mathbb{H}^2/\Gamma$, con Γ che agisce in modo propriamente discontinuo. Allora, essendo S compatta, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $d(x, \phi(x)) \geq \varepsilon$ per ogni $x \in \mathbb{H}^2$ e per ogni $\phi \in \Gamma$. Per l'osservazione precedente si deduce che le isometrie non banali di Γ sono tutte iperboliche.

1.3 Omotopia equivariante

Osservazione 1.26. Siano (X, x) e (Y, y) spazi topologici puntati con (\tilde{X}, a) e (\tilde{Y}, b) rivestimenti universali, e G ed H i relativi gruppi di isomorfismi di rivestimenti, e sia $f : X \rightarrow Y$ continua.

Esiste allora un unico sollevamento g che fa commutare il diagramma rispettando i punti base.

$$\begin{array}{ccc}
 (\tilde{X}, a) & \xrightarrow{g} & (\tilde{Y}, b) \\
 \downarrow p & & \downarrow p' \\
 (X, x) & \xrightarrow{f} & (Y, y)
 \end{array}$$

Sia inoltre $f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ l'applicazione indotta da f ai gruppi fondamentali. Sfruttando gli isomorfismi $G \cong \pi_1(X, x)$ e $H \cong \pi_1(Y, y)$ indicheremo con $\bar{\gamma}$ l'omeomorfismo del rivestimento universale associato alla classe di omotopia della curva γ .

In queste notazioni vale:

$$\forall [\gamma] \in \pi_1(X, x) \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{X} \quad g(\bar{\gamma}(\tilde{x})) = \overline{f_*([\gamma])}(g(\tilde{x})).$$

Dimostrazione. La commutatività di questo diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\tilde{X}, a) & \xrightarrow{\bar{\gamma}^{-1}} & (\tilde{X}, \cdot) & \xrightarrow{g} & (\tilde{Y}, \cdot) & \xrightarrow{\overline{f_*([\gamma])}} & (\tilde{Y}, \cdot) \\
 \downarrow p & \searrow p & \downarrow p & & \downarrow p' & \searrow p' & \downarrow p' \\
 (X, x) & \xrightarrow{id} & (X, x) & \xrightarrow{f} & (Y, y) & \xrightarrow{id} & (Y, y)
 \end{array}$$

implica che la funzione $\overline{f_*([\gamma])} \circ g \circ \bar{\gamma}^{-1}$ è un sollevamento di f .
 Dimostrando che $\overline{f_*([\gamma])} \circ g \circ \bar{\gamma}^{-1}(a) = b$ si conclude, poiché fissati i punti base nei rivestimenti esiste un unico sollevamento di f , e quindi $\overline{f_*([\gamma])} \circ g \circ \bar{\gamma}^{-1} = g$ da cui la tesi. Ricordiamo allora che, in generale, dato un diagramma commutativo, con π e π' rivestimenti:

$$\begin{array}{ccc}
 (E, u) & \xrightarrow{\phi} & (F, v) \\
 \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\
 (X, x) & \xrightarrow{\psi} & (Y, y)
 \end{array}$$

e data una curva $(\mathbb{S}^1, s) \xrightarrow{\alpha} (X, x)$ vale $\phi(\bar{\alpha}(u)) = \phi(\alpha_u(1)) = (\psi \circ \alpha)_v(1) = \overline{\psi_*([\alpha])}(v)$, dove con α_u e $(\psi \circ \alpha)_v$ si intendono rispettivamente il sollevamento di α con punto base u e il sollevamento di $\psi \circ \alpha$ con punto base v (per una dimostrazione si veda [9]). Basta allora considerare il diagramma dato dai rivestimenti universali iniziale e come curva γ^{-1} e sfruttando le proprietà dei vari omomorfismi ($\overline{f_*([\gamma])}^{-1} = \overline{f_*([\gamma^{-1}]})$) si ha la tesi. \square

Generalizzando quanto appena visto si la seguente definizione:

Definizione 1.27. Dati X e Y spazi topologici, G e H due gruppi che agiscono su di questi, e $f : G \rightarrow H$ omomorfismo, diremo che una funzione $\phi : X \rightarrow Y$ è f -equivariante se vale $\phi \circ g = f(g) \circ \phi \quad \forall g \in G$.

Nel corso della trattazione quando faremo riferimento al sollevamento di una curva $\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\alpha} X$ intenderemo il sollevamento dell'applicazione $\mathbb{R} \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\alpha} X$, mentre chiameremo sollevamento proprio il sollevamento della mappa $I \rightarrow \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\alpha} X$ (useremo sempre la notazione $I = [0, 1]$). Qualora trovassimo un'omotopia tra due sollevamenti $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ quindi non sarà in generale ovvio dedurre un'omotopia tra α e β . Si ha però la seguente

Proposizione 1.28. Siano $\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\alpha} X$ e $\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\beta} X$ due curve in X e siano $\mathbb{R} \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \tilde{X}$ e $\mathbb{R} \xrightarrow{\tilde{\beta}} \tilde{X}$ due sollevamenti al rivestimento universale, con punti base fissati in tutti

gli spazi. Supponiamo esista un'omotopia \tilde{F} tra $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ tale che $\tilde{F}(s+1, t) = \bar{\alpha}(\tilde{F}(s, t))$ per ogni $s \in \mathbb{R}$ e per ogni $t \in I$, dove $\bar{\alpha}$ rappresenta l'omeomorfismo del rivestimento universale \tilde{X} associato ad $[\alpha]$. Allora esiste un'omotopia F tra α e β che fa commutare il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times I & \xrightarrow{\tilde{F}} & \tilde{X} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ \mathbb{S}^1 \times I & \xrightarrow{F} & X \end{array}$$

Dimostrazione. Dalle ipotesi fatte su \tilde{F} risulta evidente che l'applicazione $\pi' \circ \tilde{F}$ è costante sulle fibre di π^{-1} e quindi per la proprietà universale delle identificazioni si fattorizza ad una mappa continua $F : \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow X$.

In particolare si ha $F(\cdot, 0) = \pi' \circ \tilde{F}|_{[0,1] \times \{0\}} = \alpha(\cdot)$ e $F(\cdot, 1) = \pi' \circ \tilde{F}|_{[0,1] \times \{1\}} = \beta(\cdot)$ da cui la tesi. □

Osservazione 1.29. La condizione che abbiamo imposto all'omotopia \tilde{F} è esattamente l' α_* -equivarianza, dove con α_* viene indicato l'omomorfismo $\pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \pi_1(X)$ indotto dalla curva α . Poiché $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ è ciclico è stato sufficiente verificare l'equivarianza su un suo generatore.

Osservazione 1.30. Più in generale dato il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} \times I & \xrightarrow{\tilde{F}} & \tilde{Y} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ X \times I & \xrightarrow{F} & Y \end{array}$$

con \tilde{F} omotopia tra i sollevamenti $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\psi}$ di due mappe da X in Y , se \tilde{F} è ϕ_* -equivariante, ovvero $\tilde{F}(g(x), t) = \phi_*(g)(\tilde{F}(x, t))$ per ogni automorfismo di rivestimento g , allora ne discende un'omotopia F tra ϕ e ψ .

Capitolo 2

Il criterio del bigono

2.1 I numeri di intersezione

Diremo che due curve su una superficie sono *trasverse* se nei punti di intersezione i vettori che rappresentano le direzioni delle rette tangenti ad esse sono linearmente indipendenti, e quindi in tal caso i punti di intersezione formano un insieme discreto; inoltre date due curve è sempre possibile modificarle per omotopia in modo che siano in posizione trasversa.

Ci sono due modi per contare i punti di intersezione tra due curve: date due curve chiuse, semplici, orientate e trasverse α e β il numero di intersezione algebrica $\hat{i}(\alpha, \beta)$ è la somma degli indici dei punti di intersezione, dove l'indice è $+1$ se l'orientazione dell'intersezione è coerente con l'orientazione della superficie e -1 altrimenti; il numero di intersezione geometrica $i(a, b)$ invece è il numero di intersezioni minimale tra un rappresentante della classe di omotopia libera di α , che indicheremo con a , ed uno della classe di omotopia libera di β , che indicheremo con b , al variare dei rappresentanti nelle due classi:

$$i(a, b) = \min\{|\alpha \cap \beta| : \alpha \in a, \beta \in b\}$$

e diremo che α e β sono in posizione minimale se realizzano il numero di intersezione geometrica.

Poiché le curve sono compatte, e i punti di intersezione formano un insieme discreto si ha che $\hat{i}(a, b) < +\infty$ e $i(a, b) < +\infty$ sempre.

Osservazione 2.1. Il numero di intersezione algebrica dipende solo dalla classe di omologia delle curve α e β e quindi anche in questo caso ha senso scrivere $\hat{i}(a, b)$. Inoltre dalle definizioni è evidente che il numero di intersezione algebrico è antisimmetrico, mentre il numero di intersezione geometrico è simmetrico.

Calcoliamo ora esplicitamente i numeri di intersezione algebrica e geometrica per le curve sul toro. I risultati che otterremo ci saranno utili anche nel prossimo capitolo per il calcolo del mapping class group del toro.

Osserviamo che gli elementi primitivi di \mathbb{Z}^2 sono tutti e soli quelli della forma $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$ e (p, q) con $\text{MCD}(p, q) = 1$.

Lemma 2.2. *Sia X un sottoinsieme connesso per archi del piano \mathbb{R}^2 e sia C un segmento con estremi in X e lunghezza $|C|$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un segmento parallelo a C con estremi in X e lunghezza $\frac{1}{n}|C|$.*

Per una dimostrazione si rimanda a [10].

Proposizione 2.3. *Le classi di omotopia libera non banali di curve chiuse semplici e orientate in \mathbb{T}^2 sono in biezione con gli elementi primitivi di \mathbb{Z}^2 .*

Dimostrazione. Sappiamo che esiste una biezione tra le classi di omotopia libera non banali di curve chiuse orientate nel toro e le classi di coniugio non banali nel $\pi_1(\mathbb{T}^2) \approx \mathbb{Z}^2$, che coincidono con gli elementi di $\mathbb{Z}^2 \setminus (0, 0)$. Vogliamo dimostrare che la restrizione di questa biezione alle classi di omotopia libera di curve chiuse semplici e orientate ha immagine contenuta nell'insieme degli elementi primitivi di \mathbb{Z}^2 , e che è surgettiva su di esso.

Consideriamo l'usuale rivestimento $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ i cui automorfismi sono generati dalle traslazioni secondo i vettori $(1, 0)$ e $(0, 1)$ e consideriamo $\pi(0, 0)$ come punto base per il $\pi_1(\mathbb{T}^2)$. Un modo per visualizzare un rappresentante della classe di omotopia associata all'elemento (p, q) è quello di considerare il segmento in \mathbb{R}^2 che passa per $(0, 0)$ e (p, q) e proiettarlo sul toro. Per questo particolare rappresentante si verifica con un semplice conto che la curva è semplice se e solo se (p, q) è della forma $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$ o $\text{MCD}(p, q) = 1$, quindi la restrizione è surgettiva sugli elementi primitivi di \mathbb{Z}^2 .

Dimostriamo ora che l'immagine di questa restrizione è contenuta nell'insieme degli elementi primitivi. Sia α una qualunque curva chiusa semplice sul toro. A meno di omotopia libera possiamo supporre che α passi per il punto $\pi(0, 0)$ e sia $\tilde{\alpha}$ un suo sollevamento proprio, con estremi $(0, 0)$ e $(p', q') \in \mathbb{Z}^2$. Vogliamo dimostrare che (p', q') è un elemento primitivo. Consideriamo il segmento tra i punti $(0, 0)$ e (p', q') e un'omotopia tra questo segmento e $\tilde{\alpha}$, ad esempio quella diretta. Se dimostriamo che il rappresentante ottenuto proiettando questo segmento sul toro è semplice abbiamo concluso.

Supponiamo che non sia semplice, e di conseguenza che $\text{MCD}(p', q') = d > 1$. Usiamo allora il lemma 2.2, considerando l'immagine di $\tilde{\alpha}$ come sottoinsieme $X \subset \mathbb{R}^2$, per trovare due punti $s, t \in (0, 1)$ con $\tilde{\alpha}(s) - \tilde{\alpha}(t) = (\frac{p'}{d}, \frac{q'}{d}) \in \mathbb{Z}^2$. Poiché la proiezione di questi due punti verrebbe identificata nel quoziente, avremmo che α non sarebbe semplice. \square

Proposizione 2.4. *Date due classi di omotopia libera di curve semplici chiuse e orientate corrispondenti agli elementi primitivi (p, q) e (p', q') di \mathbb{Z}^2 si ha*

$$\hat{i}((p, q), (p', q')) = pq' - p'q$$

e

$$i((p, q), (p', q')) = |pq' - p'q|.$$

Dimostrazione. La formula si verifica facilmente se $(p, q) = (1, 0)$. Nel caso generale, se (p, q) sono coprimi tra loro per il lemma di Bezout esistono $a, b \in \mathbb{Z}$ per cui $ap + bq = 1$; allora la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -q & p \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ è tale che $A(p, q) = (1, 0)$ e $A(p', q') = (ap' + bq', pq' - p'q)$.

Per ottenere la tesi basta osservare che gli omeomorfismi che conservano l'orientazione lasciano invariati entrambi i numeri di intersezione che l'applicazione indotta da A discende ad un omeomorfismo di \mathbb{T}^2 che conserva l'orientazione la cui azione sul $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ è data proprio da A .

□

Abbiamo detto che due curve sono in posizione minimale se realizzano il numero di intersezione geometrico, tuttavia in questo momento saremmo messi in difficoltà anche da domande piuttosto semplici:

- come possiamo dire se due curve α e β sono in posizione minimale?
- date due classi di omotopia a e b , come troviamo due rappresentanti in posizione minimale?
- dato un numero arbitrario di classi di omotopia di curve riusciamo (e come?) a trovare una collezione di curve ciascuna in una classe di omotopia che siano due a due in posizione minimale?

Daremo risposta adesso a queste domande.

Definizione 2.5. Due curve chiuse semplici e trasverse α e β formano un *bigono* se bordano un disco immerso il cui bordo è unione di un arco di α e un arco di β intersecantesi in esattamente due punti.



Figura 2.1: Un bigono.

Risulta abbastanza chiaro che due curve che formano un bigono non sono in posizione minimale; quello che non è altrettanto ovvio è che questa sia anche una condizione sufficiente:

Teorema 2.6. *Due curve semplici e trasverse su una superficie S sono in posizione minimale se e solo se non formano bigoni.*

Il seguente enunciato si può trovare in [1] all'interno della dimostrazione della proposizione 1.6.

Fatto 2.7. Una curva chiusa α in una superficie iperbolica S è semplice se e solo se valgono le seguenti proprietà:

- tutti i sollevamenti di α sono disgiunti;
- tutti i sollevamenti di α sono semplici;
- α non è un multiplo non banale di un'altra curva chiusa.

Lemma 2.8. *Se due curve chiuse semplici e trasverse α e β su una superficie S non formano bigoni, allora due qualsiasi sollevamenti $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ al rivestimento universale si intersecano in al più un punto.*

Dimostrazione. Supponiamo $\chi(S) \leq 0$, in modo che il rivestimento universale \tilde{S} di S sia omeomorfo ad \mathbb{R}^2 , e indichiamo con $p: \tilde{S} \rightarrow S$ la mappa di rivestimento. Consideriamo due sollevamenti $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ di α e β e supponiamo che si intersechino in almeno due punti. Riusciremo adesso a trovare un disco bordato da due archi di $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ la cui parte interna non interseca $p^{-1}(\alpha \cup \beta)$ che si proietterà ad un bigono tra α e β , concludendo per assurdo.

Consideriamo due punti di intersezione consecutivi e indichiamo con D_0 il disco racchiuso tra i due sollevamenti. Osserviamo che per trasversalità $p^{-1}(\alpha) \cap p^{-1}(\beta)$ è un insieme discreto, e che poiché entrambe le curve in S sono semplici, due sollevamenti distinti di α o di β non possono intersecarsi tra di loro, né i sollevamenti possono autointersecarsi. Per questo motivo se nella parte interna di D_0 ci sono punti di $p^{-1}(\beta)$, allora il sollevamento passante per quei punti dovrà entrare ed uscire da D_0 intersecando $\tilde{\alpha}$, formando così un altro disco D_1 . Questo procedimento non può continuare all'infinito, perché violerebbe la discretezza di $p^{-1}(\alpha) \cap p^{-1}(\beta)$, e quindi riusciamo a trovare un disco D con le proprietà richieste. Indichiamo con v_1 e v_2 i due vertici del bigono tra i due sollevamenti e dimostriamo che $p|_D$ è un omeomorfismo con l'immagine.

Dimostriamo per prima cosa che $p|_{\partial D}$ è un embedding: sicuramente $p(v_1) \neq p(v_2)$ poiché $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ si intersecano con orientazioni diverse; inoltre non può accadere che due punti rispettivamente degli archi $\tilde{\alpha}_1$ e $\tilde{\beta}_1$ che bordano D siano identificati al quoziente, altrimenti si riuscirebbero a trovare all'interno di D dei punti appartenenti a $p^{-1}(\alpha \cup \beta)$, ma sappiamo che questo non è possibile; infine non possono essere identificati due punti sullo stesso arco, ad esempio di $\tilde{\alpha}_1$, perché se così fosse, essendo α semplice, tra i due punti ci sarebbe un intero sollevamento proprio di α , e quindi anche un sollevamento del punto $p(v_1)$, ricadendo quindi nel caso precedente.

Dimostriamo ora che $p|_D$ è un embedding. Supponiamo che esistano $x, y \in D$ e ϕ isomorfismo di rivestimenti tale che $\phi(y) = x$. Poiché p è un embedding ristretto a ∂D sappiamo che $\phi(\partial D) \cap \partial D = \emptyset$ o $\phi(\partial D) \cap \partial D = \partial D$, nel caso in cui $\phi = id$.

Dimostriamo allora che $\phi(D)$ o $\phi^{-1}(D)$ è contenuto in D , da cui per il teorema del punto fisso di Brouwer si conclude che $\phi = id$. Infatti per il teorema della curva di Jordan $\phi(\partial D)$ sconnette \mathbb{R}^2 in due componenti connesse A e B , di cui supporremo A essere

quella interna a $\phi(\partial D)$. Poiché B non è semplicemente connesso deve necessariamente essere $\phi(D) = A$; in particolare, poiché $\phi(y) = x \in D$, si ha $A \cap D \neq \emptyset$. Basta ora osservare che questo implica che $D \supset A$ o $D \subset A$, da cui $\phi(D) \subset D$ o $\phi^{-1}(D) \subset D$. \square

Nel supporre $\chi(S) \leq 0$ abbiamo escluso i casi della sfera S_0 , della sfera con una puntura e della sfera con una componente di bordo. Questa ipotesi non è restrittiva, poiché in questi casi tutte le curve sono banali.

Dimostrazione. (Teorema 2.6)

Indichiamo con α e β le due curve e supponiamo formino un bigono, bordato dagli archi α' e β' . Consideriamo un intorno chiuso del bigono omeomorfo ad un disco in modo da avere una situazione simile alla figura 2.1. Poiché il disco è semplicemente connesso e i due estremi di α giacciono dallo stesso lato di β , con un'omotopia riusciamo a rendere disgiunti i due archi, diminuendo il numero di intersezioni tra α e β , e dimostrando quindi che non sono in posizione minimale.

Per dimostrare l'altra implicazione dotiamo la superficie S di una struttura differenziale e assumiamo che tutte le mappe siano lisce. Consideriamo l'omotopia $H : \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow S$ tale che $H(\cdot, 0) = \alpha$ e $H(\cdot, 1) = \bar{\alpha}$, dove $\bar{\alpha}$ ha numero di intersezione geometrico con β minore di quello di α (poiché stiamo supponendo che α e β non siano in posizione minimale, sappiamo che esiste). Possiamo anche supporre che H sia trasversa a β , in modo che la controimmagine della curva β sia una 1-varietà, le cui componenti connesse saranno dei tipi rappresentati in figura 2.2 .

In particolare, poiché sappiamo che i punti intersezione tra $\bar{\alpha}$ e β sono di meno di quelli tra α e β , esisterà una componente del tipo evidenziato.

Indichiamo con δ la componente connessa e con δ' l'arco di $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ che ha gli stessi estremi e con il quale δ borda un disco in $\mathbb{S}^1 \times I$. Evidentemente $H(\delta \cup \delta')$ è una curva chiusa banale in $\alpha \cup \beta$, e quindi si può sollevare ad una curva chiusa nel rivestimento universale \tilde{S} . In particolare questo sollevamento si può estendere a due sollevamenti di α e β che si intersecano in due punti. Per il lemma precedente si conclude che α e β formano almeno un bigono. \square

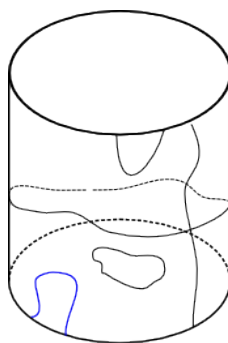


Figura 2.2: I vari tipi di componenti connesse della controimmagine di β .

In questo teorema abbiamo sfruttato un risultato che afferma che se una mappa liscia f è trasversa ad una sottovarietà V allora $f^{-1}(V)$ è una sottovarietà. Per una dimostrazione si veda [11].

Corollario 2.9. *Due curve che si intersecano solo una volta sono in posizione minimale.*

Siamo così riusciti a dare risposta alle prime due domande: per dire se due curve sono in posizione minimale ci basta controllare se formano bigoni, e per ricavare i rappresentanti in posizione minimale di due curve è sufficiente eliminare per omotopia tutti i bigoni che le curve formano.

Per quanto riguarda la terza domanda, daremo risposta solo nel caso di superfici con caratteristica di Eulero minore di 0, e il modo per risolvere il problema sarà particolarmente elegante. Dimosteremo infatti che nella classe di omotopia di ogni curva chiusa c'è un unico rappresentante geodetico, e che le geodetiche sono sempre in posizione minimale.

Lemma 2.10. *Sia S una superficie iperbolica, \tilde{S} il suo rivestimento universale e α un elemento primitivo di $\pi_1(S)$. Allora c'è una corrispondenza biunivoca:*

$$\{\text{Elementi della classe di coniugio di } \alpha \text{ in } \pi_1(S)\} \iff \{\text{Sollevamenti della curva } \alpha\}$$

La corrispondenza si ottiene associando ad ogni sollevamento $\tilde{\alpha}$ a \tilde{S} della curva α l'unico elemento della classe di coniugio di α in $\pi_1(S)$ la cui corrispondente isometria fissa $\tilde{\alpha}$.

Per una traccia di dimostrazione vedere [1].

Proposizione 2.11. *Sia S una superficie iperbolica compatta e sia α una curva chiusa non banale e non omotopa ad una componente di bordo. Allora esiste un unico $p \in \mathbb{N}^+$ ed un' unica geodetica periodica orientata chiusa γ tale che α sia liberamente omotopa a γ_p , ovvero la curva che percorre p volte il periodo minimo di γ .*

Dimostrazione. Sia $\tilde{\alpha}$ un sollevamento di α e sia ϕ l'isometria iperbolica che stabilizza $\tilde{\alpha}$, il cui asse indicheremo con A . Appliciamo in \mathbb{H}^2 un'omotopia (ad esempio lungo le geodetiche come in figura 2.3) equivariante tra $\tilde{\alpha}$ e A che quindi discende ad un'omotopia tra un certo multiplo di una geodetica γ_1 in S e α .

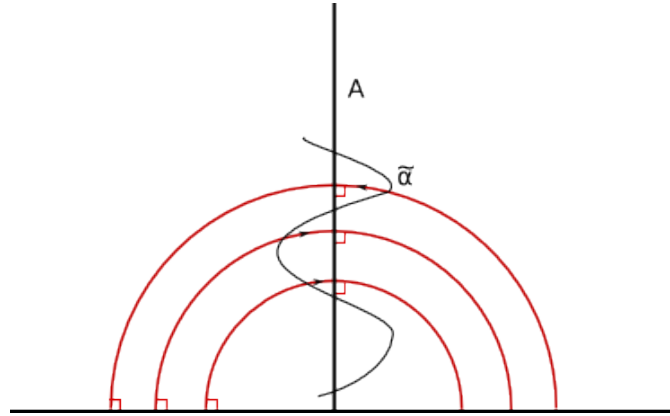


Figura 2.3: Omotopia lungo le geodetiche nel modello del semipiano.

Il sollevamento $\tilde{\alpha}$ ha gli stessi estremi dell'asse; per dimostrare questo basta considerare un rettangolo bordato da $\tilde{\alpha}$ e A come in figura 2.4 e osservare che le sue iterate sono a lui isometriche e concatenate e che quindi la distanza tra le due curve è limitata.

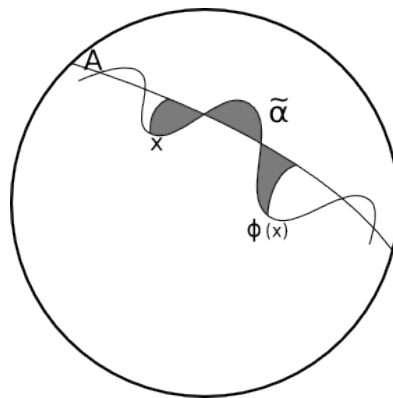


Figura 2.4

Dimostriamo ora l'unicità. Supponiamo di avere un'omotopia $F : \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow S$ tra α e un multiplo γ' di una geodetica chiusa semplice γ'_1 . Per compattezza di $\mathbb{S}^1 \times I$ sappiamo che nessun punto della curva α è mosso ad una distanza maggiore di una certa costante $C \geq 0$. Sollevando questa omotopia ad \mathbb{H}^2 abbiamo che il sollevamento della geodetica γ'_1 ha gli stessi estremi dell'asse A e quindi coincide con esso, poiché una geodetica in \mathbb{H}^2 è determinata dai suoi estremi.

Quindi la curva γ'_1 è uguale a γ_1 a meno di segno, e perciò γ' è un multiplo di γ_1 . Tuttavia due multipli diversi di γ_1 sono associati a delle classi di coniugio in $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ che corrispondono a dilatazioni di fattori diversi, e poiché due classi di coniugio di dilatazioni di fattori diversi sono distinte, concludiamo che due multipli distinti di γ_1 non possono essere liberamente omotopi. \square

Diremo che due curve sono linkate all'infinito se gli estremi dell'una separano gli estremi dell'altra in $\partial\mathbb{H}^2$.

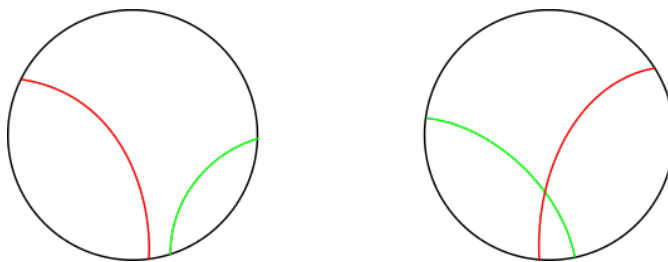


Figura 2.5: Geodetiche non linkate e geodetiche linkate all'infinito.

Lemma 2.12. *Due geodetiche che non sono linkate sono disgiunte in $\overline{\mathbb{H}^2}$.*

Dimostrazione. È ovvia data la caratterizzazione delle geodetiche nel piano iperbolico. \square

Proposizione 2.13. *Date una superficie iperbolica compatta S e una curva α chiusa, semplice e non banale in S , allora ogni elemento della corrispondente classe di coniugio in $\pi_1(S)$ è primitivo.*

Dimostrazione. Fissiamo una struttura iperbolica su S e consideriamo l'isometria iperbolica ϕ di \mathbb{H}^2 associata ad un qualsiasi elemento della classe di coniugio di α . Per dimostrare la tesi ci basterà mostrare che ϕ è primitivo come elemento del gruppo degli isomorfismi di rivestimento. Supponiamo che esista un isomorfismo di rivestimenti ψ tale che $\phi = \psi^n$ con $n \in \mathbb{Z}$. Poiché ϕ e ψ commutano hanno gli stessi punti fissi. Consideriamo il sollevamento $\tilde{\alpha}$ di α con gli stessi estremi dell'asse di ϕ . Poiché α è semplice i suoi sollevamenti sono tutti disgiunti e hanno estremi diversi, e poiché ψ è un automorfismo di rivestimento anche $\psi(\tilde{\alpha})$ è un sollevamento di α . Da quanto abbiamo supposto si ha $\psi^{n-1}(\psi(\tilde{\alpha})) = \phi(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}$ e poiché ψ e ϕ hanno gli stessi punti fissi questo può accadere solo se $\psi(\tilde{\alpha})$ e $\tilde{\alpha}$ hanno gli stessi estremi, ovvero se $\psi(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}$, e poiché $\phi = \psi^n$ si ha che la curva α gira n volte intorno alla curva associata a ψ , ed essendo α semplice si ha che $n = \pm 1$, che è quello che volevamo. \square

Osservazione 2.14. Questa proposizione estende parte di quanto già osservato per il toro nella proposizione 2.3 a tutte le superfici iperboliche compatte.

Proposizione 2.15. *Sia S una superficie iperbolica compatta e α una curva non banale in S . Sia γ il rappresentante geodetico delle proposizione 2.11. Allora se α è semplice anche γ lo è.*

Dimostrazione. Per la proposizione 2.13 sappiamo che γ non è multiplo di nessuna curva; inoltre le geodetiche in \mathbb{H}^2 sono sempre curve semplici, e quindi sappiamo anche che tutti i sollevamenti di γ sono semplici. Per applicare il fatto 2.7 e concludere che γ è semplice, dobbiamo dimostrare che tutti i sollevamenti di γ sono disgiunti.

Per ipotesi α è semplice e quindi i suoi sollevamenti sono tutti disgiunti. In particolare non sono linkati all'infinito. Dato un qualunque sollevamento di γ ce n'è uno di α con gli stessi estremi, e quindi anche i sollevamenti di γ sono tutti non linkati all'infinito, il che per le geodetiche implica essere disgiunti, e quindi siamo nelle ipotesi del fatto 2.7. \square

Osservazione 2.16. Due geodetiche sono sempre in posizione minimale: se formassero un bigono, essendo semplicemente connesso, potremmo sollevarlo a un bigono tra due geodetiche in \mathbb{H}^2 , contraddicendo il fatto che per due punti passa un'unica geodetica.

Abbiamo quindi risolto anche il terzo problema nel caso di superfici iperboliche compatte. Dato un numero arbitrario di classi di omotopia di curve chiuse consideriamo per ogni curva non omotopa ad una componente di bordo l'unico rappresentante geodetico associato, mentre per quelle omotope a componenti di bordo consideriamo esattamente la componente di bordo associata. Nel caso in cui la superficie abbia punture, possiamo sostituirlle con componenti di bordo, togliendo alla superficie un disco che le borda. Questo procedimento non cambia la situazione da un punto di vista topologico e quindi i rappresentanti nelle classi di omotopia che troviamo vanno bene anche nella superficie iniziale.

Osservazione 2.17. Abbiamo considerato sempre e solo curve in questi risultati, ma per gli archi valgono risultati completamente analoghi, con le dovute attenzioni qualora le omotopie siano relative al bordo o meno.

2.2 Il principio di cambio di coordinate

Definizione 2.18. Data una superficie S e una curva chiusa e semplice α in S indichiamo con S_α la superficie che si ottiene tagliando S lungo α . S_α consiste in una superficie dotata di un omeomorfismo h tra due sue componenti di bordo in modo che il quoziente $S_\alpha/(x \sim h(x))$ sia omeomorfo ad S e che l'immagine delle due componenti di bordo tramite questo quoziente sia α .

Se S è connessa e la superficie ottenuta tagliando S lungo α è sconnessa, diremo che α è *separante*.

Utilizzeremo questa tecnica e il teorema di classificazione delle superfici per dedurre una proprietà delle curve che ci farà comodo nella maggior parte delle dimostrazioni che affronteremo. Spesso infatti ci serviremo di alcune figure per aiutare le dimostrazioni, che talvolta hanno un carattere particolarmente geometrico. Tuttavia sono poche le curve

comode da disegnare e con cui lavorare e quindi abbiamo bisogno di poter ricondurre la dimostrazione a queste poche curve.

Il cosiddetto *principio di cambio di coordinate* soddisfa questa necessità. Presentiamo qualche esempio per capire come funziona:

- supponiamo di avere α e β curve semplici chiuse e non separanti in S . Tagliando S rispettivamente lungo α e β otteniamo due superfici S_α e S_β . Queste superfici hanno la stessa caratteristica di Eulero (la stessa di S), stesso numero di componenti di bordo (due in più di S) e stesso numero di punture. Per il teorema di classificazione allora queste due superfici sono omeomorfe, e possiamo imporre che l'omeomorfismo mappi le componenti di bordo relative ad α in quelle relative a β rispettando le relazioni di equivalenza, in modo da farne discendere un omeomorfismo di S in sé che manda la curva α in β . Si possono fare ulteriori richieste tecniche, ad esempio che l'omeomorfismo conservi l'orientazione della superficie, oppure, se consideriamo le curve orientate, possiamo cambiare l'orientazione di α per renderla coerente con quella di β .
- consideriamo α e β curve semplici chiuse e separanti e supponiamo che entrambe dividano S_g in una superficie di genere k e una di genere $n - k$. Ma allora per un discorso analogo al caso precedente S_α e S_β sono omeomorfe e riusciamo a trovare un omeomorfismo che manda α in β .
- sia (α, β) una coppia di curve non separanti con $i(\alpha, \beta) = 1$. Tagliando lungo α si ottiene una superficie S_α in cui β è diventata un arco che ne connette due componenti di bordo. La superficie $(S_\alpha)_\beta$ ha una componente di bordo che è divisa in quattro archi, due derivanti da α e due da β . Applicando lo stesso procedimento con un'altra coppia (α', β') dello stesso tipo otteniamo una superficie $(S_{\alpha'})_{\beta'}$ che per il teorema di classificazione è omeomorfa a $(S_\alpha)_\beta$ ed esiste un omeomorfismo che rispetta le relazioni di equivalenza ai bordi. Questo omeomorfismo induce un omeomorfismo di S che manda la coppia (α, β) nella coppia (α', β') .

Naturalmente ci sono molti altri casi in cui il principio del cambio di coordinate ci permette di lavorare senza perdita di generalità con un setting di curve a nostro piacere, ma l'idea che giustifica il procedimento è sempre la stessa; ci limitiamo quindi a questi esempi, prendendoci la libertà di invocare il principio senza troppi dettagli quando necessario. Sottolineiamo che si può supporre che gli omeomorfismi ricavati nei precedenti esempi conservino l'orientazione della superficie.

Capitolo 3

Il Mapping Class Group e il metodo di Alexander

Diamo ora la definizione di *mapping class group* di una superficie S e ne consideriamo degli esempi. Indicheremo con $\text{Omeo}^+(S, \partial S)$ il gruppo di automorfismi di S che ne conservano l'orientazione e che ne fissano puntualmente il bordo dotato della topologia compatto-aperta. Il *mapping class group* di S , denotato con $\text{MCG}(S)$, è il gruppo:

$$\text{MCG}(S) = \pi_0(\text{Omeo}^+(S, \partial S)).$$

Osservazione 3.1. Per i teoremi presentati nella prima sezione possiamo analogamente definire $\text{MCG}(S) = \pi_0(\text{Diffeo}^+(S, \partial S))$ e avere, a meno di isomorfismo, lo stesso gruppo.

Osservazione 3.2. Nel caso in cui S abbia delle punture le considereremo come punti marcati e allora per definizione imporremo che tanto gli omeomorfismi quanto le isotopie che rientrano nella definizione di $\text{MCG}(S)$ lascino invariato l'insieme dei punti marcati.

3.1 Il trucco di Alexander

Proposizione 3.3. *Il mapping class group del disco D^2 è banale.*

Dimostrazione. Sia $f \in \text{MCG}(D^2)$. Identificando D^2 con il disco unitario chiuso in \mathbb{R}^2 e considerando l'isotopia:

$$\phi(x, t) = \begin{cases} (1-t)f\left(\frac{x}{1-t}\right) & 0 \leq |x| \leq 1-t \\ x & 1-t \leq |x| \leq 1 \end{cases}$$

si ha la tesi. □

L'idea geometrica di questa dimostrazione è semplice: se consideriamo il cilindro pieno $D^2 \times [0, 1]$ e il cono come in figura, allora la sezione trasversale ad altezza t rappresenta $\phi(\cdot, 1 - t)$, che restringe f al disco di raggio $1 - t$ e agisce come l'identità al di fuori di questo disco.

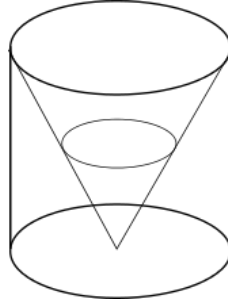


Figura 3.1: Il trucco di Alexander

Analogamente si dimostra che il mapping class group del disco con una puntura è banale.

Presentiamo qualche mapping class non banale: nella figura a sinistra viene raffigurato un rappresentante ϕ di un elemento non banale di ordine 5 di $\text{MCG}(S_5)$, evidenziando una curva α tale che $\alpha, \phi(\alpha), \phi^2(\alpha), \phi^3(\alpha), \phi^4(\alpha)$ sono a due a due non isotopi; l'elemento del $\text{MCG}(S_g)$ nella seconda figura è la classe di isotopia della rotazione di 180 gradi intorno all'asse, si chiama involuzione iperellittica ed ha ordine 2.

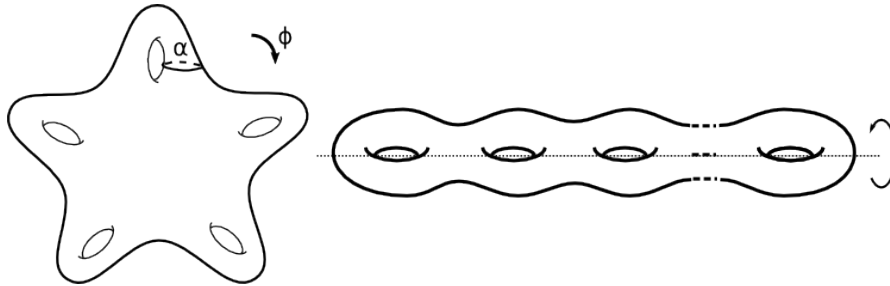


Figura 3.2: Mapping classes non banali

3.2 Primi esempi di Mapping Class Groups

Procediamo ora a calcolare i mapping class groups dell'anello A , della sfera S^2 e del toro T^2 .

Proposizione 3.4. $MCG(A) \approx \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Identifichiamo l'anello A con $\mathbb{S}^1 \times I$ e consideriamo il rivestimento universale $\mathbb{R} \times I$; data $f \in MCG(A)$ e $\phi : A \rightarrow A$ che la rappresenta, possiamo sollevare ϕ a $\tilde{\phi} : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R} \times I$ tale che $\tilde{\phi}(0,0) = (0,0)$ e poiché $\tilde{\phi}|_{\mathbb{R} \times \{1\}}$ solleva l'identità di $\mathbb{S}^1 \times \{1\}$, allora è una traslazione intera e si ha che $\tilde{\phi}(0,1) \in \mathbb{Z} \times \{1\}$. Indicheremo con $\tilde{\phi}_1$ la composizione di $\tilde{\phi}$ con la proiezione sulla prima componente.

Definiamo allora la mappa $\rho : MCG(A) \rightarrow \mathbb{Z}$, $\rho(f) = \tilde{\phi}_1(0,1)$; ovviamente è un omomorfismo, poiché la composizione di due traslazioni t_a e t_b è uguale a t_{a+b} . Inoltre è ben definita poiché se ϕ e ψ sono due rappresentanti di f allora considerando l'isotopia F che fissa il bordo di $\mathbb{S}^1 \times I$ e il sollevamento \tilde{F} che fa commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times I \times I & \xrightarrow{\tilde{F}} & \mathbb{R} \times I \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ \mathbb{S}^1 \times I \times I & \xrightarrow{F} & \mathbb{S}^1 \times I \end{array}$$

e tale che $\tilde{F}(0,0,0) = (0,0)$ si ha che \tilde{F} è almeno un'omotopia tra i sollevamenti $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\psi}$. Infatti $\tilde{F}|_{\mathbb{R} \times I \times \{0\}} = \tilde{\phi}$ perché entrambi sono sollevamenti di ϕ che fissano $(0,0) \in \mathbb{R} \times I$, e poiché l'isotopia $F(\cdot, \cdot, t)$ fissa $\partial(\mathbb{S}^1 \times I)$, allora $\tilde{F}(\cdot, 0, t)$ è a valori in \mathbb{Z} e perciò costante, da cui si ha che $\tilde{F}(0,0,1) = (0,0)$ e che $\tilde{F}|_{\mathbb{R} \times I \times \{1\}} = \tilde{\psi}$. Dato che analogamente $\tilde{F}(\cdot, 1, t)$ è costante, si conclude che $\tilde{\phi}(0,1) = \tilde{F}(0,1,0) = \tilde{F}(0,1,1) = \tilde{\psi}(0,1)$ e quindi $\tilde{\phi}_1(0,1) = \tilde{\psi}_1(0,1)$.

Dimostriamo ora che ρ è un isomorfismo. Dato $n \in \mathbb{Z}$ l'applicazione lineare indotta da:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

manda $\mathbb{R} \times I$ in sé e inoltre per ogni τ isomorfismo di rivestimento si ha $\tau \circ M = M \circ \tau$ e quindi discende ad un ben definito rappresentante di una mapping class di A , la cui immagine tramite ρ è ovviamente n .

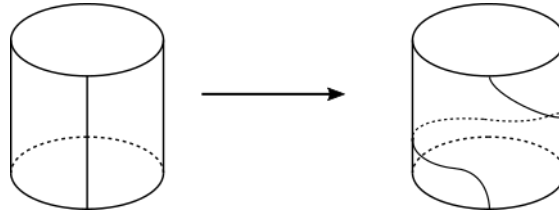


Figura 3.3: Azione della mapping class dell'omeomorfismo indotto con $n=-1$

Supponiamo ora che $f \in \text{Ker}(\rho)$ e sia ϕ un suo rappresentante; poiché $\tilde{\phi}_1(0, 1) = 0$ si ha che $\tilde{\phi}$ fissa puntualmente entrambe le componenti di bordo di $\mathbb{R} \times I$. Dimostriamo allora che l'omotopia $F(x, y, t) = t(x, y) + (1-t)\tilde{\phi}(x, y)$ tra $id_{\mathbb{R} \times I}$ e $\tilde{\phi}$ discende ad un'omotopia tra $id_{\mathbb{S}^1 \times I}$ e ϕ che fissa $\partial(\mathbb{S}^1 \times I)$. A questo scopo verifichiamo la ϕ_* -equivarianza di F : poiché ϕ fissa il bordo di A si ha che $\phi_* = id$, e per le proprietà dei sollevamenti $\tilde{\phi}(\tau(x, y)) = \tau(\tilde{\phi}(x, y))$ per ogni automorfismo di rivestimento τ e quindi

$$\begin{aligned} F(x+n, y, t) &= t(x+n, y) + (1-t)\tilde{\phi}(x+n, y) = t(x, y) + (1-t)\tilde{\phi}(x, y) + (1-t+t)(n, 0) = \\ &= F(x, y, t) + (n, 0). \end{aligned}$$

Poiché un'omotopia relativa al bordo tra due omeomorfismi di una superficie compatta che conservano l'orientazione può essere promossa ad un'isotopia relativa al bordo si conclude. \square

Lemma 3.5. *Dato un omeomorfismo f di \mathbb{S}^2 esiste f' omeomorfismo isotopo che fissa almeno un punto.*

Dimostrazione. È un corollario della proposizione 5.8, dimostrata nel quinto capitolo. \square

Lemma 3.6. *$MCG(S_{0,1})$ è banale.*

Dimostrazione. Sia ϕ un rappresentante di $f \in MCG(S_{0,1})$ e indichiamo con p il punto marcato. La dimostrazione si compone di due passi: in un primo momento mostriamo che ϕ è omotopa ad una mappa che fissa puntualmente una circonferenza intorno al punto p , da cui utilizzando il trucco di Alexander f si deduce che ϕ è omotopa, e quindi isotopa per il teorema 1.9, all'identità; in seguito modifichiamo l'isotopia in modo che ad ogni tempo fissi il punto p .

Riduciamoci a lavorare in un intorno coordinato di p ed identifichiamo p con l'origine, ad esempio tramite la restrizione della proiezione stereografica ad un suo opportuno intorno, e fissiamo delle coordinate polari.

Consideriamo ora la palla di raggio ε e centro l'origine. Tramite il passaggio in coordinate polari, in questo intorno la funzione ϕ viene identificata con la mappa:

$$\begin{aligned} B(0, \varepsilon) &\xrightarrow{(R, \Theta)} B(0, \varepsilon') \\ (r, \theta) &\longrightarrow (R(r, \theta), \Theta(r, \theta)). \end{aligned}$$

Siano $\rho_0 < R_0$ e sia $0 < r_0 < \text{dist}(f(\overline{B(0, R_0)} \setminus B(0, \rho_0)), 0)$; possiamo supporre $r_0 < \rho_0$. Consideriamo una funzione continua positiva e decrescente $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\varphi \equiv 1$ se $x \leq \rho_0$, $\varphi \equiv 0$ se $x \geq R_0$ e $\varphi(x) \leq 1$ altrimenti, e definiamo l'omotopia:

$$\begin{aligned} B(0, \varepsilon) \times I &\xrightarrow{F} B(0, \varepsilon') \\ (r, \theta, t) &\longrightarrow ((1 - \varphi(r)t)R(r, \theta) + \varphi(r)tr, \Theta(r, \theta)). \end{aligned}$$

Osserviamo che la mappa $F(\cdot, \cdot, 1)$ manda la circonferenza di raggio r in sé per $r \leq \rho_0$ e coincide con (R, Θ) su $B(0, R_0)^C$. Inoltre per costruzione $f(B(0, \rho_0)^C) \subset B(0, r_0)^C$.

Consideriamo $F(\cdot, \cdot, 1)|_{\mathbb{S}_{r_0}^1} : \mathbb{S}_{r_0}^1 \rightarrow \mathbb{S}_{r_0}^1$ che preserva l'orientazione e quindi esiste un'omotopia H con l'identità.

Adesso modifichiamo per omotopia $F(\cdot, \cdot, 1)|_{\overline{B(0, r_0)}}$ in modo da ottenere una mappa che sulla palla chiusa $\overline{B(0, \frac{r}{2})}$ coincida con $F(\cdot, \cdot, 1)|_{\overline{B(0, r_0)}}$ opportunamente riscalata in modo da essere un'applicazione dalla palla $\overline{B(0, \frac{r}{2})}$ in sé e che sulla circonferenza $\mathbb{S}_{\frac{3}{4}r_0}^1$ sia l'identità, lasciando inalterata $F(\cdot, \cdot, 1)$ sulla circonferenza $\mathbb{S}_{r_0}^1$ e sul complementare di $B(0, r_0)$. Un modo per ottenere questa omotopia è considerare la seguente famiglia di mappe, parametrizzata da $s \in I$: fissata una funzione continua positiva e strettamente decrescente $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\eta(0) = r_0$ e $\eta(1) = \frac{3}{4}r_0$, la mappa Λ_s ristretta alla palla $\overline{B(0, 2\eta(s) - r_0)}$ coincide con $F(\cdot, \cdot, 1)|_{\overline{B(0, r_0)}}$, sulle circonferenze \mathbb{S}_r^1 con $\eta(s) \leq r \leq r_0$ coincide con $H_{\eta^{-1}(r)}$ e sulle circonferenze \mathbb{S}_r^1 con $2\eta(s) - r_0 \leq r \leq \eta(s)$ è definita come $H_{\eta^{-1}(2\eta(s) - r)}$, dove ovviamente tutte le mappe sono opportunamente riscalate.

La mappa ottenuta al termine di questa omotopia fissa puntualmente $\mathbb{S}_{\frac{3}{4}r_0}^1$ e conserva gli insiemi $B(0, \frac{3}{4}r_0)$ e $B(0, \frac{3}{4}r_0)^C$. Siamo riusciti quindi a completare il primo passo, e utilizzando il trucco di Alexander otteniamo un'omotopia tra ϕ e l'identità.

Sappiamo quindi anche che esiste un'isotopia $G : \mathbb{S}^2 \times I \rightarrow \mathbb{S}^2$ tra f e l'identità. Consideriamo la mappa $SO(3) \rightarrow \mathbb{S}^2$ che ad ogni rotazione \mathcal{R} associa $\mathcal{R}(p)$: questa mappa è una fibrazione e quindi per ogni cammino chiuso $I \rightarrow \mathbb{S}^2$ con punto base in p esiste un cammino chiuso $I \rightarrow SO(3)$ con punto base id tale che il diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} & & SO(3) \\ & \nearrow & \downarrow \\ I & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \end{array}$$

Indicando allora con $g : I \rightarrow SO(3)$ il sollevamento chiuso con punto base id del cammino $G(p, \cdot) : I \rightarrow \mathbb{S}^2$, si ha che l'isotopia $G' : \mathbb{S}^2 \times I \rightarrow \mathbb{S}^2$ definita da $G'(x, t) = g(t)^{-1}(G(x, t))$ è un'isotopia tra ϕ e $id_{\mathbb{S}^2}$ che ad ogni tempo fissa il punto p . \square

Proposizione 3.7. $MCG(\mathbb{S}^2)$ è banale.

Dimostrazione. Data $f \in MCG(\mathbb{S}^2)$ ne consideriamo un rappresentante ϕ che fissa un punto assicuratici dal lemma 3.5, e marcando questo punto, possiamo vedere ϕ come rappresentante di un elemento di $MCG(S_{0,1})$, che per il lemma 3.6 è isotopo all'identità. \square

Presentiamo ora il calcolo di $MCG(\mathbb{T}^2)$. Questo esempio è particolarmente importante, in quanto racchiude delle idee che sono applicabili anche per le superfici di genere superiore, e permette di coglierle in modo comprensibile data la semplicità del caso.

Proposizione 3.8. $MCG(\mathbb{T}^2) \approx SL(2, \mathbb{Z})$.

Dimostrazione. Ogni omeomorfismo ϕ induce un automorfismo ϕ_* di $H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^2$ e poiché mappe omotope inducono le stesse mappe in omologia, l'applicazione $\phi \mapsto \phi_*$ discende ad una mappa $\sigma : MCG(\mathbb{T}^2) \rightarrow GL(2, \mathbb{Z})$. Più precisamente, poiché gli omeomorfismi che conservano l'orientazione lasciano invariato il numero di intersezione algebrica l'immagine di σ è contenuta in $SL(2, \mathbb{Z})$: infatti consideriamo γ_1 e γ_2 due generatori di $H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z})$ con numero di intersezione algebrico e geometrico 1; per la proposizione 2.4 si ha $\det(\sigma([\phi])) = \hat{i}(\phi \circ \gamma_1, \phi \circ \gamma_2) = \hat{i}(\gamma_1, \gamma_2) = 1$.

La dimostrazione della surgettività di σ è simile al caso dell'anello: data $A \in SL(2, \mathbb{Z})$, l'applicazione indotta da questa matrice è equivariante rispetto agli automorfismi di rivestimento, e quindi discende ad un omeomorfismo ϕ_A di \mathbb{T}^2 in sé che conserva l'orientazione. Data la corrispondenza tra gli elementi primitivi di \mathbb{Z}^2 e le classi di omotopia di curve semplici chiuse, abbiamo che l'azione di ϕ_A sul primo gruppo di omologia del toro è data proprio da A e quindi $\sigma([\phi_A]) = A$.

Supponiamo ora che $\sigma(f)$ sia la matrice identica e consideriamo un rappresentante ψ . Indichiamo con α e β le curve che rappresentano gli elementi $(0, 1)$ e $(1, 0)$ del $\pi_1(\mathbb{T}^2)$. Dalle ipotesi fatte abbiamo che $\psi(\alpha)$ è isotopa ad α e per il teorema 1.7 questa isotopia si può estendere ad un'isotopia ambiente. Quindi a meno di isotopia possiamo supporre che ψ fissi puntualmente α conservandone anche l'orientazione. Consideriamo allora l'anello ottenuto tagliando il toro lungo α , in cui β è diventata un arco che ne congiunge i bordi; poiché α è fissato puntualmente, l'omeomorfismo ψ induce un omeomorfismo $\bar{\psi}$ che conserva l'orientazione e fissa il bordo dell'anello e poiché $\bar{\psi}(\beta)$ è isotopo a β per la proposizione 3.4 $\bar{\psi}$ è isotopo all'identità tramite un'isotopia che fissa il bordo dell'anello, e quindi anche ψ è isotopo all'identità. □

3.3 Il metodo di Alexander

Nella dimostrazione dell'injectività di σ nella Proposizione 3.9 siamo riusciti a determinare l'azione di un elemento del mapping class group semplicemente testando il suo comportamento su alcune curve precise. Potevamo utilizzare un argomento simile anche nel calcolare il mapping class group dell'anello: basta considerare un arco tagliando lungo il quale si ottiene un disco, come quello in figura, per riuscire a determinare il carattere dell'elemento preso in considerazione.

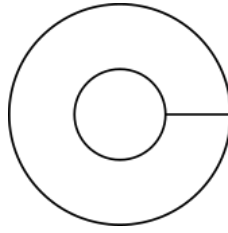


Figura 3.4: Tagliando l'anello lungo l'arco si ottiene un disco.

Definizione 3.9. Diremo che una collezione di curve ed archi $\{\gamma_i\}$ in una superficie S con punti marcati *riempie* S se la superficie ottenuta tagliando lungo tutti i γ_i è l'unione disgiunta di dischi e dischi con un punto marcato.

Gli esempi discussi finora portano a pensare che se una mapping class f agisce banalmente su un insieme di curve ed archi che riempie una superficie allora $f = id$. In realtà quello che accade è più sottile: l'involuzione iperellittica di S_g fissa la collezione di curve in figura, ciononostante l'azione dell'involuzione iperellittica sul primo gruppo di omologia è non banale, quindi non può essere isotopa all'identità.

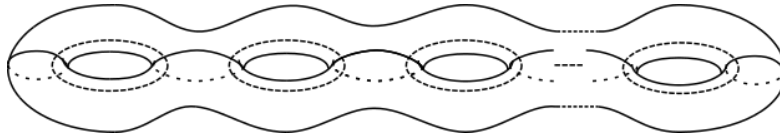


Figura 3.5: Curve che riempiono S_g .

Presentiamo allora l'enunciato preciso:

Teorema 3.10. (*Metodo di Alexander*) Sia S una superficie compatta, eventualmente con punti marcati, e sia $\phi \in \text{Omeo}^+(S, \partial S)$. Sia $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ una collezione di curve chiuse semplici essenziali e archi propri in S con le seguenti proprietà:

- $i \gamma_i$ sono in posizione minimale.
- $i \gamma_i$ sono due a due non isotopi.
- fissati i, j e k distinti almeno uno tra $\gamma_i \cap \gamma_j, \gamma_j \cap \gamma_k$ o $\gamma_k \cap \gamma_i$ è vuoto.

Allora:

1. se esiste una permutazione σ di $\{1, \dots, n\}$ tale che $\phi(\gamma_i)$ è isotopo a $\gamma_{\sigma(i)}$ relativamente a ∂S per ogni i , allora esiste un'isotopia relativa al bordo tra $\phi(\bigcup \gamma_i)$ e $\bigcup \gamma_i$.

Se consideriamo $\bigcup \gamma_i$ come un grafo Γ orientato in S , i cui vertici sono i punti di intersezione e gli estremi degli archi, allora la composizione di ϕ con questa isotopia è un automorfismo ϕ_* di Γ .

2. *supponiamo che $\{\gamma_i\}$ riempia S . Se ϕ_* fissa ogni vertice e ogni arco di Γ , con orientazione, allora ϕ è isotopo all'identità. Altrimenti, ϕ ha una potenza non banale che è isotopa all'identità.*

Per una dimostrazione si rimanda a [1].

Capitolo 4

Twist di Dehn

Nel prossimo capitolo dimostreremo che il *mapping class group* della superficie di genere g S_g è finitamente generato. I generatori saranno delle particolari trasformazioni applicate in un intorno di alcune precise curve. In questo capitolo introdurremo queste mapping classes e ne studieremo le principali proprietà.

Consideriamo l'anello A identificato con $\mathbb{S}^1 \times I$ e immergiamolo nel piano tramite la mappa $(\theta, t) \mapsto ((t+1)\cos\theta, (t+1)\sin\theta)$, dotandolo dell'orientazione indotta dal piano. Sia $T : A \rightarrow A$ la mappa definita da $T(\theta, t) = (\theta + 2\pi t, t)$. Tale mappa fissa puntualmente il bordo dell'anello e ne conserva l'orientazione e quindi è un ben definito rappresentante di una mapping class.

Osservazione 4.1. La mappa T , se considerata come mappa da $\mathbb{S}^1 \times I$ in sé è esattamente la mappa la cui azione è rappresentata in figura 3.3.

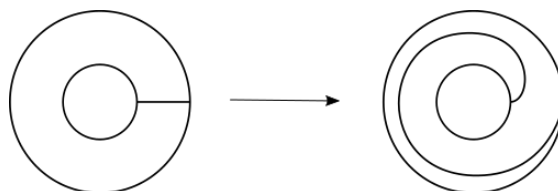


Figura 4.1: Un'altra rappresentazione dell'azione della mappa T .

Definizione 4.2. Sia S una superficie orientata e sia α una curva semplice chiusa in S . Sia N un intorno tubolare chiuso di α e scegliamo un omeomorfismo che conservi l'orientazione $\phi : A \rightarrow N$. Allora definiamo la mappa T_α , che chiameremo *twist di Dehn* intorno ad α :

$$T_\alpha(x) = \begin{cases} \phi \circ T \circ \phi^{-1}(x) & x \in N \\ x & x \notin N \end{cases}$$

Geometricamente il twist di Dehn intorno ad α fissa il complementare dell'intorno tubolare e sull'intorno agisce come la mappa T agisce sull'anello. Un modo per vedere

come agisce il twist di Dehn intorno ad α su una curva β consiste nell'applicare la seguente regola in ogni punto di intersezione di β con α : si sostituisce un segmento di β con un altro che gira a sinistra, segue α per tutto il suo giro, e poi gira a destra.

Nel definire i twist di Dehn abbiamo scelto l'intorno tubolare N e l'omeomorfismo ϕ , ma per il teorema di unicità dell'intorno tubolare (di cui l'enunciato e una dimostrazione si possono trovare in [11]) la classe di isotopia della mappa T_α non dipende da queste scelte, e inoltre non dipende dalla scelta di α nella sua classe di isotopia. Quindi se a rappresenta la classe di isotopia di α utilizzeremo anche la notazione T_a per indicare il twist di Dehn relativo alla classe di isotopia a .

Un altro modo per rappresentare il twist di Dehn intorno ad una curva consiste nel tagliare la superficie lungo la curva, applicare la mappa T ad un intorno di una delle due componenti di bordo così ottenute e poi riincollare, come mostrato in figura:

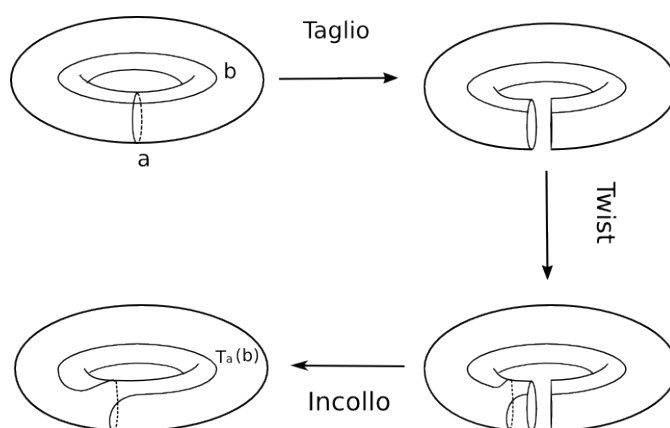


Figura 4.2: Twist di Dehn tramite il taglia e incolla.

Se la curva α è omotopa ad un punto o ad una puntura allora il twist di Dehn ad essa associato è banale; infatti in tal caso borderebbe un disco o un disco punturato e quindi potremmo trovare un'isotopia tra il twist e l'identità.

Proposizione 4.3. *Sia a la classe di isotopia di una curva semplice chiusa α in S . Se α non è omotopa ad un punto o ad una puntura allora il twist di Dehn T_a è non banale.*

Dimostrazione. Supponiamo che α sia una curva non separante, allora per il principio del cambio di coordinate possiamo trovare una curva β , la cui classe di isotopia indicheremo con b , tale che $i(a, b) = 1$, e possiamo supporre che si incontrino come in figura 4.2, dalla quale si evince anche che $i(T_a(b), b) = 1$ e poiché un bigono richiederebbe almeno due intersezioni, si ha che $T_a(b) \neq b$.

Se invece α è separante il principio di cambio di coordinate ci permette di supporre che sia qualitativamente come in figura 4.3 (nel senso che ci potrebbero essere punture e le

superfici che si ottengono tagliando lungo α possono avere generi diversi). Consideriamo allora una curva β che abbia numero di intersezione geometrica 2 con α ; avremo allora che $T_a(\beta)$ avrà quattro punti di intersezione con β . Queste intersezioni non formano nessun bigono in quanto tutti i candidati bigoni (ne evidenziamo uno in figura 4.3) sono curve non separanti e quindi non possono bordare un disco. Quindi $T_a(\beta)$ e β non possono essere omotope e T_a è non banale.

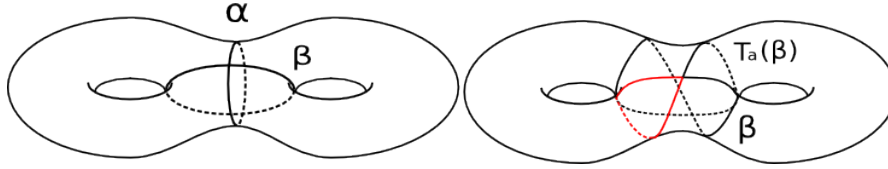


Figura 4.3

L'ultimo caso da analizzare è il caso in cui α sia omotopa ad una componente di bordo di S . In tal caso consideriamo la superficie \bar{S} ottenuta incollando S a se stessa identificandone le componenti di bordo; in questo modo α è diventata una curva essenziale in \bar{S} . Se esistesse un'isotopia relativa a ∂S tra $T_a \in \text{MCG}(S)$ e id allora si potrebbe estendere, ad esempio imponendo che sia l'identità sulla copia di S , ad un'isotopia tra $T_a \in \text{MCG}(\bar{S})$ e id , ma abbiamo già dimostrato che i twist di Dehn associati alle curve essenziali non sono banali, e quindi $T_a \in \text{MCG}(S)$ è non banale. \square

Osservazione 4.4. Ovviamente se $i(a, c) = 0$ allora $T_a(c) = c$, dato che possiamo scegliere l'intorno tubolare su cui far agire il twist in modo che un rappresentante della classe c giaccia nel suo complementare.

Cerchiamo ora di generalizzare quest'ultima proposizione, con un risultato che ha come importante corollario che i twist di Dehn associati a curve essenziali hanno ordine infinito.

Proposizione 4.5. Siano a e b classi di isotopia di curve semplici chiuse essenziali in S e sia $k \in \mathbb{Z}$. Allora:

$$i(T_a^k(b), b) = |k|i(a, b)^2.$$

Dimostrazione. Fissiamo due rappresentanti α e β in posizione minimale. Osserviamo che nel caso in cui il numero di intersezione geometrica tra a e b è alto non è molto semplice raffigurare $T_a(b)$. Usiamo allora il seguente metodo per rappresentare la situazione locale nelle intersezioni: consideriamo $i(a, b)$ curve parallele α_i nella classe di omotopia di α che siano tutte in posizione minimale con β . Dalla definizione di twist di Dehn segue che l'azione di T_a si ottiene modificando β in ogni punto di intersezione con una di queste curve secondo il modo schematizzato in figura:

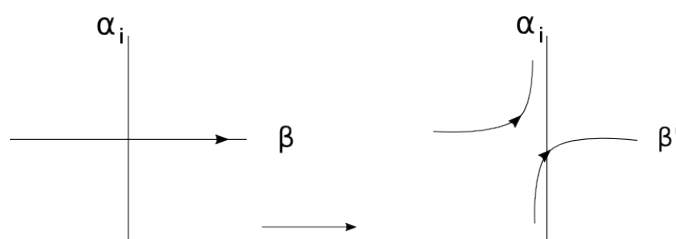


Figura 4.4

Passiamo ora alla dimostrazione. Aiutiamoci anche qui con un disegno, dato che il caso generale è analogo. Consideriamo due curve α e β con $k = 1$ e $i(a, b) = 3$ e applichiamo il metodo appena discusso per calcolare $i(T_a(b), b)$ come nel disegno a sinistra in figura 4.5.

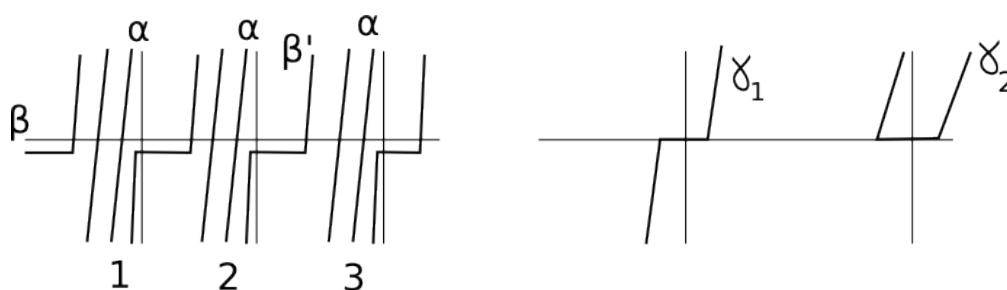


Figura 4.5

Dal disegno è chiaro che i punti di intersezione sono 9, ma per poter affermare che $i(T_a(b), b) = |k|i(a, b)^2$ dobbiamo verificare che le due curve $T_a(\beta)$ e β sono in posizione minimale.

Consideriamo i punti di intersezione tra β e β' e tagliamo le curve in questi punti ottenendo degli archi $\tilde{\beta}_i$ e $\tilde{\beta}'_i$. Affinché si formi un bigono tra le due curve devono esserci due punti di intersezione che siano consecutivi per entrambi, e questo avviene solo nei due casi della figura 4.5, poiché due punti di intersezione consecutivi di β' con β giacciono sempre in due regioni diverse delle tre numerate. Consideriamo le curve γ_1 e γ_2 : nel primo dei due casi però, i punti di intersezione hanno lo stesso orientamento e quindi γ_1 non può bordare un bigono; nel secondo invece se γ_2 bordasse un bigono allora poiché gli archi verticali di β' sono paralleli ad α si avrebbe che α e β non sarebbero in posizione minimale.

□

Proposizione 4.6. *Date a e b classi di isotopia di curve semplici chiuse essenziali si ha $T_a = T_b \iff a = b$.*

Dimostrazione. Abbiamo già osservato che se due curve sono isotope allora i twist di Dehn associati sono isotopi e quindi un'implicazione è già stata discussa.

Supponiamo invece che $a \neq b$ e dimostriamo che i twist di Dehn associati sono due elementi diversi del mapping class group. Se riuscissimo a trovare una terza classe di isotopia c tale che $i(a, c) = 0$ e $i(b, c) \neq 0$ avremmo concluso, poiché per la Proposizione 4.5 si avrebbe:

$$i(T_a(c), c) = 0 \neq i(b, c)^2 = i(T_b(c), c)$$

e quindi T_a e T_c non possono essere isotopi.

Se $i(a, b) \neq 0$ allora possiamo prendere $c = a$, mentre se $i(a, b) = 0$, analizzando i vari casi, possiamo usare il principio di cambio di coordinate per trovare c . \square

Proposizione 4.7. *Per ogni $f \in MCG(S)$ e per ogni classe di isotopia a di curve semplici chiuse vale:*

$$T_{f(a)} = f \circ T_a \circ f^{-1}.$$

Dimostrazione. Basta considerare un rappresentante in a e un rappresentante di f e segue direttamente dalla definizione di twist di Dehn. \square

Corollario 4.8. *Per ogni $f \in MCG(S)$ e per ogni classe di isotopia a di curve semplici chiuse essenziali si ha:*

$$f \text{ commuta con } T_a \iff f(a) = a.$$

Dimostrazione. Si ha:

$$T_a \circ f = f \circ T_a \iff T_{f(a)} = T_a \iff f(a) = a.$$

\square

Corollario 4.9. *Per ogni a e b classi di isotopia di curve semplici chiuse essenziali si ha:*

$$i(a, b) = 0 \iff T_a(b) = b \iff T_a \circ T_b = T_b \circ T_a.$$

Dimostrazione. L'unica implicazione non ovvia è che la seconda proprietà implichi la prima, ma basta osservare che $i(a, b)^2 = i(T_a(b), b) = i(b, b) = 0$. \square

Proposizione 4.10. *(Proprietà delle trecce) Date due classi di isotopia di curve semplici chiuse essenziali a e b si ha $a = b$ o $i(a, b) = 1 \iff T_a \circ T_b \circ T_a = T_b \circ T_a \circ T_b$.*

Dimostrazione. Si ha:

$$\begin{aligned} T_a \circ T_b \circ T_a = T_b \circ T_a \circ T_b &\iff (T_a \circ T_b) \circ T_a \circ (T_a \circ T_b)^{-1} = T_b \iff \\ &\iff T_{T_a \circ T_b(a)} = T_b \iff T_a \circ T_b(a) = b \end{aligned}$$

dove le due ultime equivalenze sono dovute alle proposizioni 4.7. e 4.6. Dimostriamo quindi che $a = b$ o $i(a, b) = 1 \iff T_a \circ T_b(a) = b$.

\implies)

Se $a = b$ allora è ovvio; se invece $i(a, b) = 1$ consideriamo una coppia di rappresentanti in posizione minimale α e β ; queste due curve non sconnettono, infatti tagliando prima

lungo α si ha che β diventa un arco che connette le due componenti di bordo della nuova superficie, e quindi per il principio di cambio di coordinate possiamo supporre siano le due curve in figura 4.6.

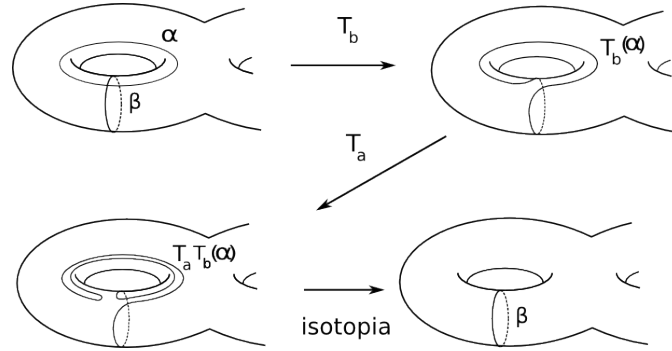


Figura 4.6

\Leftarrow)

Supponiamo $T_a \circ T_b(a) = b$. Applicando il twist T_a^{-1} si ha:

$$i(a, b) = i(a, T_a \circ T_b(a)) = i(T_a^{-1}(a), T_b(a)) = i(a, T_b(a)) = i(a, b)^2$$

il che implica $i(a, b) = 0$ o $i(a, b) = 1$.

Se $i(a, b) = 0$ allora $T_a \circ T_b(a) = a$, e poiché per ipotesi $T_a \circ T_b(a) = b$, allora abbiamo $a = b$, il che ci fa concludere. \square

Proposizione 4.11. *Date due classi di isotopia di curve semplici chiuse essenziali orientate a e b con $i(a, b) = 1$ si ha che $T_b \circ T_a^2 \circ T_b$ inverte l'orientazione di a .*

Dimostrazione. Per il principio del cambio di coordinate possiamo supporre di essere nel caso in figura 4.7.

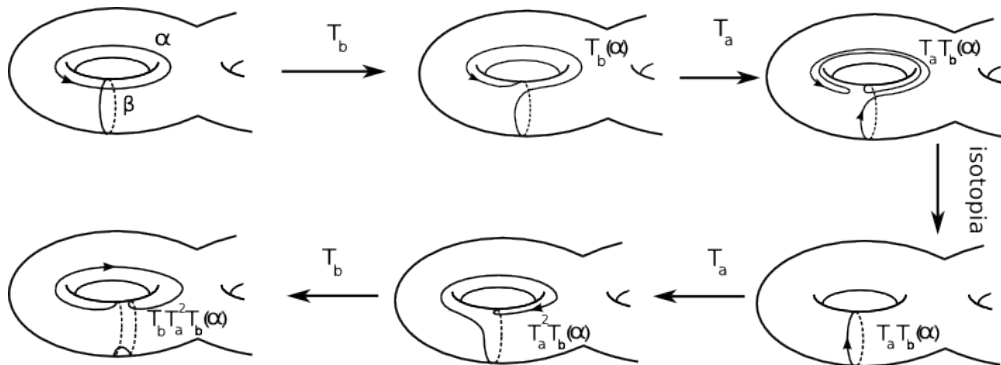


Figura 4.7

\square

Capitolo 5

Il teorema di Dehn-Lickorish

In questo capitolo presenteremo il teorema di Dehn-Lickorish:

Teorema 5.1. (*Dehn-Lickorish*) Per ogni $g \geq 0$, $MCG(S_g)$ è generato da un numero finito di twist di Dehn intorno a curve semplici chiuse non separanti.

Evidentemente questo teorema non si applica alle superfici con punture, poiché i twist di Dehn non le permutano, tuttavia vale qualcosa di molto simile.

Definizione 5.2. Data una superficie $S_{g,n}$ con punture, definiamo il *mapping class group puro*, denotato con $PMCG(S_{g,n})$, il sottogruppo di $MCG(S_{g,n})$ composto dagli elementi che fissano singolarmente tutte le punture.

Con queste notazioni si ha una naturale successione esatta

$$1 \longrightarrow PMCG(S_{g,n}) \longleftarrow MCG(S_{g,n}) \longrightarrow \Sigma_n \longrightarrow 1$$

dove con Σ_n indichiamo il gruppo delle permutazioni di n elementi e dove la mappa $MCG(S_{g,n}) \longrightarrow \Sigma_n$ associa ad ogni mapping class la permutazione indotta sulle punture. Quello che effettivamente andremo a dimostrare è un risultato leggermente più generale del teorema 5.1, ovvero che $PMCG(S_{g,n})$ è generato da finiti twist di Dehn intorno a curve semplici chiuse non separanti per ogni $g \geq 1$ $n \geq 0$.

Per riuscire ad ottenere questo risultato dovremo introdurre due strumenti molto importanti: il complesso delle curve e la successione esatta di Birman.

Cerchiamo di capire da dove nascerà la necessità di questi due oggetti nel corso della dimostrazione dando un accenno di come dimostrare l'enunciato più debole che il mapping class group è generato dall'insieme infinito dei twist di dehn intorno a curve non separanti. Essa sarà basata su una doppia induzione su genere e numero di punture della superficie:

- nell'induzione sul genere, data $f \in MCG(S_{g,n})$ e scelta una classe di isotopia di curve semplici chiuse non separanti cercheremo una composizione h di twist intorno a curve non separanti che mandi $f(a)$ in a . In questo modo avremo che $h \circ f$ fissa

la classe a e quindi possiamo tagliare $S_{g,n}$ lungo a in modo da abbassarne il genere e usare l'ipotesi induttiva. Per riuscire a trovare una tale h utilizzeremo il complesso delle curve.

- nell'induzione sul numero delle punture, data la superficie $S_{g,n}$ considereremo l'omomorfismo surgettivo $\text{MCG}(S_{g,n}) \rightarrow \text{MCG}(S_{g,n-1})$ indotto dal riempimento di una puntura. Con la successione esatta di Birman riusciremo a dimostrare che il nucleo di questo omomorfismo è isomorfo a $\pi_1(S_{g,n-1})$ e dimostreremo che è generato da un numero finito di twist intorno a curve semplici essenziali non separanti.

5.1 Il complesso delle curve

Definizione 5.3. Il complesso delle curve di una superficie S , indicato con $C(S)$, è un complesso simpliciale il cui 1-scheletro è definito come segue:

- i vertici corrispondono alle classi di isotopia di curve semplici chiuse essenziali.
- si ha un arco tra due vertici a e b se e solo se $i(a, b) = 0$.

I k -simplessi di $C(S)$ corrispondono alle $(k + 1)$ -uple di vertici che siano vicendevolmente connessi da archi.

Osservazione 5.4. Poiché nella definizione del complesso delle curve consideriamo solo curve essenziali, potremo confondere la componenti di bordo e le punture senza perdere di generalità e quindi d'ora in poi parleremo solo di punture.

Ricordiamo che il nostro obiettivo è quello di trovare una composizione di twist associati a curve non separanti che mandi $f(a)$ in a . La proposizione 4.10 ci assicura che se $i(f(a), a) = 1$ allora $T_{f(a)} \circ T_a(f(a)) = a$; qualora si avesse $i(f(a), a) \neq 1$ cercheremo una successione di curve non separanti $a = c_1, \dots, c_n = f(a)$ tali che $i(c_j, c_{j+1}) = 1$. In questo caso sarà sufficiente considerare $(T_{c_2} \circ T_{c_1}) \circ \dots \circ (T_{c_n} \circ T_{c_{n-1}})$.

Proposizione 5.5. *Se $3g + n \geq 5$ allora $C(S)$ è connesso.*

Dimostrazione. La dimostrazione procederà per induzione sul numero di intersezione geometrica.

Se $i(a, b) = 0$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo $i(a, b) = 1$ e consideriamo due rappresentanti α e β in posizione minimale. L'intorno tubolare chiuso di $\alpha \cup \beta$ è un toro con una componente di bordo. Indichiamo con c la classe di isotopia della componente di bordo: sicuramente $i(a, c) = i(b, c) = 0$ e inoltre c non può essere non essenziale, perché altrimenti la superficie S sarebbe un toro o un toro con una puntura, e si avrebbe $3g + n < 5$.

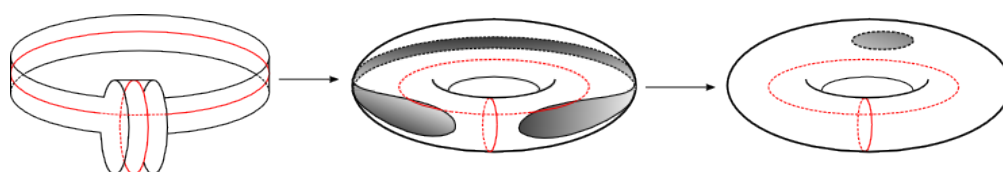


Figura 5.1: Omeomorfismo tra intorno tubolare e toro con una componente di bordo.

Supponiamo ora $i(a, b) \geq 2$ e che le curve con numero di intersezione geometrica minore di $i(a, b)$ siano connesse. Troveremo una classe di isotopia c con $i(a, c) < i(a, b)$ e $i(b, c) < i(a, b)$ in modo da ricavarne un cammino tra a e b .

Consideriamo due rappresentanti α e β in posizione minimale, e orientiamoli in modo da poter distinguere i due casi in figura:

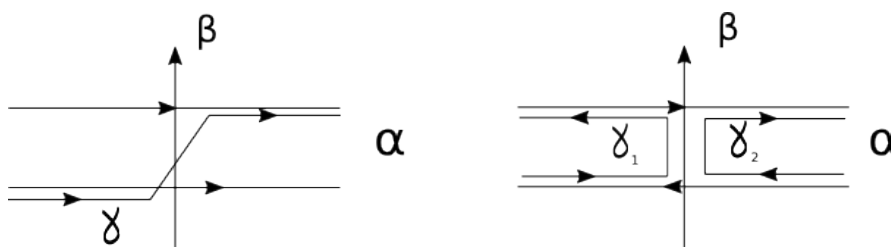


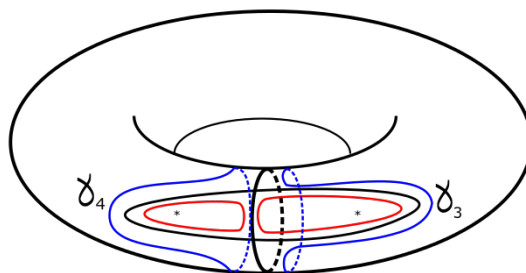
Figura 5.2

Nel primo caso i due punti di intersezione hanno lo stesso indice e indichiamo con γ , e con c la rispettiva classe di isotopia, la curva che si mantiene sempre a sinistra di α e che salta un'intersezione come in figura. Sicuramente γ è essenziale, poiché $i(a, c) = 1$, e per costruzione $i(a, c) < i(a, b)$ e $i(b, c) < i(a, b)$.

Nel secondo caso la situazione è leggermente più complicata. Iniziamo con l'osservare che γ_1 e γ_2 non possono essere curve banali, perché se così fosse allora α e β , che sappiamo essere in posizione minimale, formerebbero un bigono; potrebbero essere entrambe omotope ad una puntura, e in tal caso α borderebbe due punture.

Consideriamo allora le curve γ_3 e γ_4 , definite in modo analogo, ma dall'altra parte della curva α , come raffigurato ad esempio in figura 5.3: nessuna delle due può essere banale perché altrimenti riusciremmo a contrarre β intorno ad una delle due punture bordate da α , e se fossero entrambe omotope ad una puntura concluderemmo che $S_{g,n} = S_{0,4}$, ed in tal caso $3g + n < 5$.

Quindi almeno una di queste quattro curve è essenziale e sicuramente ognuna di queste curve ha numero di intersezione geometrica con a e b minore di $i(a, b)$.

Figura 5.3: Le curve γ_3 e γ_4 .

□

Facciamo una piccola modifica al complesso delle curve e definiamo il *complesso delle curve non separanti* $N(S)$, che è il sottocomplesso di $C(S)$ i cui vertici sono le classi di isotopia di curve chiuse semplici essenziali e non separanti.

Proposizione 5.6. $N(S_{g,n})$ è connesso per $g \geq 2$.

Dimostrazione. Lavoreremo prima restringendoci al caso $g \geq 2$ e $n \leq 1$ e poi dimostreremo per induzione il caso generale. Consideriamo a e b classi di isotopia di curve semplici chiuse essenziali e non separanti. Grazie alla proposizione precedente sappiamo che esiste una sequenza $a = c_1, \dots, c_n = b$ di curve essenziali tali che $i(c_j, c_{j-1}) = 0 \quad \forall j \in \{2, \dots, n\}$; quello che faremo sarà modificare questa sequenza in modo da avere sempre curve non separanti.

Supponiamo c_j sia separante e consideriamone un rappresentante γ_j e indichiamo con S' e S'' le due superfici che si ottengono tagliando lungo γ_j . Poiché $g \geq 2$ e $n \leq 1$ entrambe le superfici hanno genere positivo.

Se c_{j-1} e c_{j+1} hanno dei rappresentanti che giacciono in due superfici diverse, allora possiamo semplicemente trascurare c_j nella sequenza; se invece i rappresentanti giacciono nella stessa superficie, ad esempio S' , allora basta sostituire c_j con una curva non separante in S'' .

Nel caso generale tutto procede analogamente, però si può presentare l'eventualità in cui S'' sia un disco con più di una puntura, però allora S' ha ancora genere ≥ 2 e meno punture di $S_{g,n}$, quindi possiamo usare l'ipotesi induttiva per trovare una classe di isotopia di curve non separanti \bar{c}_j tale che $i(\bar{c}_j, c_{j-1}) = 0$ e $i(\bar{c}_j, c_{j+1}) = 0$. □

Finalmente siamo pronti per dimostrare il risultato che ci eravamo preposti all'inizio della sezione. Modifichiamo ulteriormente il complesso delle curve non separanti: indicheremo con $\hat{N}(S)$ il complesso simpliciale i cui vertici sono le classi di isotopia di curve semplici chiuse non separanti e in cui esiste un arco tra due vertici a e b se e solo se $i(a, b) = 1$.

Proposizione 5.7. $\hat{N}(S_{g,n})$ è connesso per $g \geq 2$.

Dimostrazione. Consideriamo a e b classi di isotopia di curve non separanti. Grazie alla proposizione 5.6 sappiamo che esiste una sequenza $a = c_1, \dots, c_n = b$ di curve non separanti tali che $i(c_j, c_{j-1}) = 0 \quad \forall j \in \{2, \dots, n\}$. Utilizzando il principio di cambio di coordinate per ogni j possiamo trovare una classe di isotopia curve non separanti d_j tale che $i(c_j, d_j) = 1$ e $i(c_{j+1}, d_j) = 1$, e quindi considerando $a = c_1, d_1, c_2, \dots, c_{n-1}, d_{n-1}, c_n = b$ abbiamo la tesi. \square

5.2 La successione esatta di Birman

Data una superficie S , eventualmente con punture, e un punto $x \in S$ possiamo considerare la superficie S^* ottenuta marcando il punto x .

Abbiamo allora il seguente omomorfismo:

$$Forget : MCG(S^*) \longrightarrow MCG(S)$$

ottenuto dimenticando che x è un punto marcato; equivalentemente, se consideriamo S^* ottenuto aggiungendo una puntura a S , allora $Forget$ è l'omomorfismo indotto dall'inclusione $S^* \hookrightarrow S$.

Proposizione 5.8. L'omomorfismo $Forget : MCG(S^*) \longrightarrow MCG(S)$ è surgettivo.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che dato ϕ omeomorfismo che conserva l'orientazione di S ne esiste uno isotopo che fissa x . Se $\phi(x) = x$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo $\phi(x) \neq x$ e consideriamo un arco α tale che $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = \phi^{-1}(x)$. Possiamo considerare questo arco come un' "isotopia tra punti" e applicare la variante 0-dimensionale del teorema 1.7 (anch'essa presente in [5]) per dedurre un'isotopia ambiente H che fa percorrere al punto x il cammino α .

Consideriamo allora l'isotopia $F(p, t) = \phi \circ H(p, t)$: essa soddisfa $F(\cdot, 0) = \phi$ e $F(x, 1) = \phi(\phi^{-1}(x)) = x$ e quindi $F(\cdot, 1)$ è l'omeomorfismo cercato. \square

Siamo ora interessati a studiare il nucleo dell'omomorfismo $Forget$.

Supponiamo che $f \in MCG(S^*)$ sia tale che $Forget(f) = 1$; sappiamo allora che esiste un'isotopia di S tra f e l'identità. Il punto x durante questa isotopia percorre una curva chiusa α con punto base in x . Con un procedimento analogo a quanto fatto nell'ultima dimostrazione, possiamo considerare α^{-1} ed estendere questa curva ad un'isotopia ambiente di S e sperare in qualche senso di recuperare informazioni su $f \in MCG(S^*)$.

Diamo allora la seguente definizione.

Definizione 5.9. Data α curva chiusa in S con punto base x e indicato con ϕ_α l'omeomorfismo che si ottiene alla fine di un'isotopia ambiente di S che estende α , possiamo considerare il punto x come punto marcato e studiare la mapping class relativa a ϕ_α in

$MCG(S^*)$.

Definiamo tale mapping class $Push(\alpha)$.

Ci sono alcune cose da puntualizzare nell'ultima definizione: bisogna verificare che se l'estensione della curva avviene tramite due isotopie in ambienti diverse allora gli omeomorfismi ottenuti sono isotopi, e quindi è ben definito l'elemento $Push(\alpha)$; inoltre si potrebbe sperare di riuscire a definire la mappa $Push$ a partire da $\pi_1(S, x)$, e quindi in tal caso dovremmo verificare che scegliere un altro rappresentante nella classe di omotopia di α non influenza la classe di isotopia di ϕ_α .

Prima di dedicarci a queste verifiche e all'argomento che dà il nome alla sezione, introduciamo un'ulteriore concetto che ci risulterà utile nella dimostrazione del teorema della successione esatta di Birman.

5.2.1 Fibrati

Per approfondire questi argomenti e trovare le dimostrazioni degli enunciati si veda [12]. Lavoreremo con coppie di spazi puntati. Una coppia di spazi puntata, denotata con (X, A, x_0) , consiste in uno spazio topologico X , un suo sottospazio $A \subset X$ e un punto $x_0 \in A$.

Un'applicazione tra coppie di spazi puntati $f : (X, A, x_0) \longrightarrow (X', A', x'_0)$ è una funzione continua da X in X' tale che $f(A) \subset A'$ e $f(x_0) = x'_0$. In queste notazioni, due mappe f e g sono omotope con punto base x_0 relativamente ad A se esiste un'omotopia $F_t : (X, A, x_0) \longrightarrow (X', A', x'_0)$ tale che $F_0(\cdot) = f$ e $F_1(\cdot) = g$.

Definizione 5.10. Definiamo l'*n*-esimo gruppo di omotopia relativa $\pi_n(X, A, x_0)$ come l'insieme di classi di omotopia di applicazioni continue da $(I^n, \partial I^n, J^{n-1})$ in (X, A, x_0) , dove $J^{n-1} = \overline{\partial I^n} \setminus I^{n-1}$ e identifichiamo I^{n-1} come la faccia di I^n con ultima coordinata uguale a 0.

I gruppi di omotopia relativa sono una generalizzazione dei gruppi di omotopia, che coincidono con $\pi_n(X, x_0, x_0)$, e per $n \geq 2$ possiamo dotarli di una struttura di gruppo analoga a quella dei gruppi di omotopia assoluti, definendo il prodotto:

$$(f * g)(x, \mathbf{y}) = \begin{cases} f(2x, \mathbf{y}) & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ g(2x - 1, \mathbf{y}) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

dove con x indichiamo la prima coordinata e con \mathbf{y} indichiamo il vettore delle restanti $n - 1$.

Vale il seguente collegamento tra gruppi di omotopia relativa e assoluta:

Proposizione 5.11. *Sia (X, A, x_0) una coppia di spazi puntata; allora la seguente successione:*

$$\cdots \rightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\delta} \pi_{n-1}(A, x_0) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_0(X, x_0)$$

è esatta.

□

Ci sono alcuni insiemi in questa successione che non sono gruppi, e in tal caso con esattezza intendiamo che gli elementi che stanno nell'immagine di un'applicazione sono esattamente quelli che vengono mandati nella classe della mappa costante da quella successiva.

Le applicazioni che compongono la successione sono: le applicazioni i_* e j_* indotte dalle inclusioni $(A, x_0) \xrightarrow{i} (X, x_0)$ e $(X, x_0) \xrightarrow{j} (X, A, x_0)$, e la mappa δ indotta dalle restrizioni delle applicazioni $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ a I^{n-1} , che sono delle mappe $(I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \rightarrow (A, x_0)$.

Definizione 5.12. Diremo che una mappa $p : E \rightarrow B$ ha la *proprietà del sollevamento dell'omotopia* rispetto allo spazio X se data un'omotopia $g_t : X \rightarrow B$ e un sollevamento $\tilde{g}_0 : X \rightarrow E$ di g_0 , allora esiste un'omotopia \tilde{g}_t che solleva g_t .

Teorema 5.13. *Supponiamo che $p : E \rightarrow B$ abbia la proprietà del sollevamento dell'omotopia rispetto ai dischi D^k per ogni $k \geq 0$ e che B sia connesso per archi. Fissato un punto base $b_0 \in B$ e $x_0 \in F = p^{-1}(b_0)$, la mappa $p_* : \pi_n(E, F, x_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$ è un isomorfismo per ogni $n \geq 1$*

□

Quindi se $p : E \rightarrow B$ soddisfa le ipotesi del teorema 5.13 dalla successione esatta della proposizione 5.11 se ne ricava un'altra esatta:

$$\cdots \rightarrow \pi_n(F, x_0) \rightarrow \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, x_0) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_0(E, x_0) \rightarrow 1.$$

Definizione 5.14. Una struttura di *fibrato* su E , con fibra F , consiste in una mappa di proiezione $p : E \rightarrow B$ tale che ogni punto di B abbia un intorno U per cui esista un omeomorfismo $h : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ che fa commutare il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U \times F \\ & \searrow p & \swarrow \pi \\ & & U \end{array}$$

dove $\pi : U \times F \rightarrow U$ è la proiezione sulla prima componente.

Indicheremo un fibrato anche con la notazione $F \longrightarrow E \longrightarrow B$, e chiameremo B spazio base e E spazio totale del fibrato.

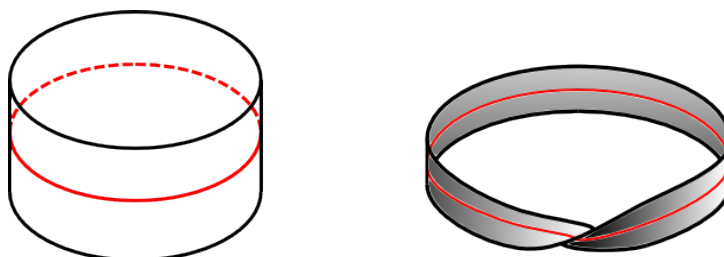


Figura 5.4: Il cilindro e il nastro di Moebius sono fibrati sulla curva evidenziata.

Proposizione 5.15. *I fibrati hanno la proprietà del sollevamento delle omotopie rispetto a tutti i CW-complessi.*

□

Corollario 5.16. *Per i fibrati vale la successione esatta dedotta dal teorema 5.13.*

Il seguente teorema è stato dimostrato da Hamstrom in una serie di articoli ([15], [16] e [17]) negli anni '60.

Teorema 5.17. *Sia S una superficie compatta, eventualmente con punture. Supponiamo che S non sia omeomorfa a $\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2, \mathbb{T}^2$, l'anello chiuso, il disco con una puntura o il piano con una puntura. Allora la componente connessa dell'identità in $\text{Omeo}(S)$ e la componente connessa dell'identità in $\text{Diffeo}(S)$ sono contrattili.*

Adesso siamo pronti per enunciare e dimostrare il teorema della successione esatta di Birman:

Teorema 5.18. *(La successione esatta di Birman) Sia S una superficie con $\chi(S) < 0$, con eventuali punture o componenti di bordo. Sia S^* la superficie ottenuta marcando un punto x nella parte interna di S . Allora la seguente successione:*

$$1 \longrightarrow \pi_1(S, x) \xrightarrow{\text{Push}} \text{MCG}(S^*) \xrightarrow{\text{Forget}} \text{MCG}(S) \longrightarrow 1$$

è esatta.

Dimostrazione. Riusciamo a dotare $\text{Omeo}^+(S)$ di una struttura di fibrato su S , con fibra il sottogruppo di $\text{Omeo}^+(S)$ formato dagli elementi che fissano x , e in cui la mappa di proiezione \mathcal{E} è la valutazione in x (tecnicamente dovremmo considerare omeomorfismi che fissano le componenti di bordo, ma questo non influenza la dimostrazione).

Consideriamo infatti un intorno U di x omeomorfo ad un disco. Per ogni punto $u \in U$

possiamo scegliere un omeomorfismo $\phi_u \in \text{Omeo}^+(S)$ che manda x in u in modo che l'applicazione $u \rightarrow \phi_u$ sia continua. È continua quindi la mappa:

$$\begin{array}{ccc} U \times \text{Omeo}^+(S, x) & \xrightarrow{h} & \mathcal{E}^{-1}(U) \\ (u, \psi) & \longrightarrow & (\phi_u \circ \psi) \end{array}$$

inoltre esplicitiamo l'inversa:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^{-1}(U) & \xrightarrow{h^{-1}} & U \times \text{Omeo}^+(S, x) \\ \psi & \longrightarrow & (\psi(x), \phi_{\psi(x)}^{-1} \circ \psi) \end{array}$$

e quindi h è un omeomorfismo. Dato un qualsiasi altro punto $y \in S$ consideriamo $\xi \in \text{Omeo}^+(S)$ che manda x in y , indichiamo con U' l'aperto $\xi(U)$ e osserviamo che quest'omeomorfismo ne induce uno $\psi \rightarrow \xi \circ \psi$ tra $\mathcal{E}^{-1}(U)$ e $\mathcal{E}^{-1}(U')$. In modo analogo a prima definiamo le mappe:

$$\begin{array}{ccc} U' \times \text{Omeo}^+(S, x) & \xrightarrow{h'} & \mathcal{E}^{-1}(U') \\ (u', \psi) & \longrightarrow & (\xi \circ \phi_{\xi^{-1}(u')} \circ \psi) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^{-1}(U') & \xrightarrow{h'^{-1}} & U' \times \text{Omeo}^+(S, x) \\ \varphi & \longrightarrow & (\varphi(x), \phi_{\xi^{-1} \circ \varphi(x)}^{-1} \circ \xi^{-1} \circ \varphi). \end{array}$$

Si verifica, e l'osservazione dell'omeomorfismo tra $\mathcal{E}^{-1}(U)$ e $\mathcal{E}^{-1}(U')$ rende più agevole il conto, che queste mappe sono continue e una l'inversa dell'altra, e quindi effettivamente si ha un fibrato $\text{Omeo}^+(S, x) \rightarrow \text{Omeo}^+(S) \xrightarrow{\mathcal{E}} S$.

Per il corollario 5.16 scegliendo come punti base $x \in S$ e $id_S \in \text{Omeo}^+(S)$ si ha quindi una successione esatta, di cui a noi interesserà la parte:

$$\cdots \rightarrow \pi_1(\text{Omeo}^+(S)) \rightarrow \pi_1(S, x) \rightarrow \pi_0(\text{Omeo}^+(S, x)) \rightarrow \pi_0(\text{Omeo}^+(S)) \rightarrow \pi_0(S, x).$$

Ovviamente $\pi_0(S, x) = 1$ e, per il teorema 5.17, poiché $\chi(S) < 0$ anche $\pi_1(\text{Omeo}^+(S), id_S) = 1$. Quindi, ricordando la definizione di *mapping class group* si arriva alla successione esatta:

$$1 \rightarrow \pi_1(S, x) \rightarrow \text{MCG}(S^*) \rightarrow \text{MCG}(S) \rightarrow 1$$

e si verifica facilmente che le due mappe in questa successione sono esattamente le mappe *Push* e *Forget*.

□

Poniamo ora l'attenzione sulla mappa *Push*.

Sia α una curva semplice chiusa in S con punto base x e identifichiamone un intorno U con l'anello $\mathbb{S}^1 \times [0, 2]$, orientato in modo canonico, tramite l'omeomorfismo ϕ . Identifichiamo il punto x con $(0, 1)$ e consideriamo l'isotopia dell'anello:

$$S((\theta, r), t) = \begin{cases} (\theta + 2\pi r t, r) & 0 \leq r \leq 1 \\ (\theta + 2\pi(2-r)t, r) & 1 \leq r \leq 2 \end{cases}$$

Possiamo allora definire un'isotopia di S che applica sull'intorno della curva la trasformazione ϕ e si estende come l'identità altrove, ossia:

$$F(x) = \begin{cases} \phi \circ S \circ \phi^{-1}(x) & x \in U \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osserviamo che l'azione dell'isotopia F sul punto x è esattamente quella di far percorrere al punto la curva α .

Inoltre al tempo $t = 1$ si ha un omeomorfismo di S^* (il punto x è tenuto fisso) che è prodotto di due twist di Dehn. Infatti se indichiamo con a e b rispettivamente le classi di omotopia delle curve $\phi(\mathbb{S}^1 \times \{0\})$ e di $\phi(\mathbb{S}^1 \times \{2\})$ si ha $Push([\alpha]) = T_a \circ T_b^{-1}$. Inoltre le classi di isotopia a e b sono non separanti se e solo se lo è α .

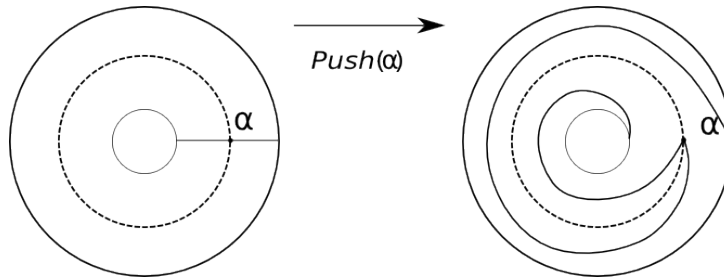


Figura 5.5: Azione di $Push(\alpha)$ sull'anello.

Osservazione 5.19. Per ogni $h \in PMCG(S^*)$ e per ogni $\alpha \in \pi_1(S, x)$ si ha $Push(h_*(\alpha)) = h \circ Push(\alpha) \circ h^{-1}$.

Adesso otteniamo altri due risultati utilizzando la stessa idea di questa dimostrazione. Ci sono varie operazioni geometriche che si possono fare con le superfici, e quello che e chiediamo ora è quali operazioni algebriche al livello di mapping class groups sono indotte da due particolari manipolazioni geometriche. Cosa succede se "tappiamo" una componente di bordo con un disco con una puntura? E se eliminiamo una curva dalla superficie?

Nel primo caso ci aspettiamo sicuramente che il Twist di Dehn associato alla componente di bordo della superficie S diventi banale una volta incollato il disco, perché la classe di isotopia della curva diventa omotopa ad una puntura.

Questo è precisato dalla seguente:

Proposizione 5.20. *Sia S una superficie con bordo e $\chi(S) \leq -2$, e sia B una componente di bordo. Indichiamo con β la classe di isotopia non orientata della componente di bordo B e con S' la superficie ottenuta incollando un disco con un punto marcato $p \in \overset{\circ}{D}$ su B . Allora si ha la seguente successione esatta:*

$$1 \longrightarrow \langle T_\beta \rangle \longrightarrow MCG(S) \longrightarrow MCG(S', p) \longrightarrow 1.$$

Dimostrazione. In questo caso ci conviene lavorare nella categoria **Diff**.

Dopo aver fissato una metrica riemanniana su S' consideriamo un vettore unitario $v \in T_p(S')$ e definiamo $\text{Diff}^+(S', (p, v))$ come i diffeomorfismi di S' in sé che conservano l'orientazione e fissano il punto p e il vettore v . Possiamo allora definire $\text{MCG}(S', (p, v)) = \pi_0(\text{Diff}^+(S', (p, v)))$. Il primo passo della dimostrazione è mostrare che esiste un isomorfismo $\text{MCG}(S) \approx \text{MCG}(S', (p, v))$. Identifichiamo $\text{MCG}(S)$ con $\pi_0(\text{Diff}^+(S', D))$, dove stiamo imponendo che i diffeomorfismi fissino puntualmente il disco D ; questa identificazione è naturale e consiste nel rimuovere l'interno di D .

Si ha un fibrato:

$$\text{Diff}^+(S', D) \longrightarrow \text{Diff}^+(S', (p, v)) \longrightarrow \text{Emb}^+((D, S'), (p, v))$$

dove $\text{Emb}^+((D, S'), (p, v))$ è lo spazio delle immersioni lisce di D in S' che conservano l'orientazione e che mandano un fissato punto del disco e vettore unitario del rispettivo piano tangente nella coppia (p, v) . Da questo fibrato deriva una successione esatta di gruppi di omotopia con punti base $id_{S'}$ e id_D ; in particolare:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_1(\text{Emb}^+((D, S'), (p, v))) \rightarrow \pi_0(\text{Diff}^+(S', D)) \rightarrow \pi_0(\text{Diff}^+(S', (p, v))) \\ \rightarrow \pi_0(\text{Emb}^+((D, S'), (p, v))). \end{aligned}$$

Lo spazio $\text{Emb}^+((S', D), (p, v), id_D)$ è contrattile (si veda per esempio [18]) e quindi da questa successione esatta si deduce l'isomorfismo tra $\text{MCG}(S', (p, v))$ e $\text{MCG}(S)$. Si ha anche un altro fibrato:

$$\text{Diff}^+(S', (p, v)) \longrightarrow \text{Diff}^+(S', p) \longrightarrow T_p(S') \setminus \{0\}$$

dove la mappa $\text{Diff}^+(S', p) \longrightarrow T_p(S') \setminus \{0\}$ associa ad ogni diffeomorfismo f il vettore $df_p(v)$, e la conseguente successione esatta con punti base $id_{S'}$ e v :

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_1(\text{Diff}^+(S', p)) \rightarrow \pi_1(T_p(S') \setminus \{0\}) \rightarrow \pi_0(\text{Diff}^+(S', (p, v))) \\ \rightarrow \pi_0(\text{Diff}^+(S', p)) \rightarrow \pi_0(T_p(S') \setminus \{0\}). \end{aligned}$$

Per il teorema 5.17 si ha che la componente connessa dell'identità in $\text{Diff}^+(S', p)$ è contrattile; inoltre ovviamente $\pi_1(T_p(S') \setminus \{0\}) \approx \mathbb{Z}$, che è isomorfo a $\langle T_\beta \rangle$, e $\pi_0(T_p(S') \setminus \{0\})$ è banale. Sfruttando l'isomorfismo trovato tra $\pi_0(\text{Diff}^+(S', (p, v)))$ e $\pi_0(\text{Diff}^+(S))$ si ottiene la tesi. \square

Osservazione 5.21. Sia la successione esatta della proposizione 5.20 che la successione di Birman valgono anche se invece del mapping class group consideriamo il mapping class group puro. Si hanno quindi le successioni esatte:

$$1 \longrightarrow \langle T_\beta \rangle \longrightarrow \text{PMCG}(S) \longrightarrow \text{PMCG}(S') \longrightarrow 1.$$

e

$$1 \longrightarrow \pi_1(S, x) \xrightarrow{\text{Push}} \text{PMCG}(S^*) \xrightarrow{\text{Forget}} \text{PMCG}(S) \longrightarrow 1.$$

Consideriamo ora una classe di isotopia orientata di curve a in S e indichiamo con $MCG(S, a)$ lo stabilizzatore di a in $MCG(S)$.

Si vorrebbe riuscire a definire un omomorfismo $\zeta : MCG(S, a) \rightarrow MCG(S \setminus a)$ che a $f \in MCG(S, a)$ associa la classe di un suo rappresentante che fissi a in $MCG(S \setminus a)$. Non è ovvio tuttavia che, fissata una curva α in a , due omeomorfismi che fissano α e sono isotopi in S lo siano anche in $S \setminus \alpha$.

Lemma 5.22. *Sia \bar{S} una superficie chiusa contenuta nella superficie S . Supponiamo \bar{S} non sia omeomorfa ad un anello chiuso e che nessuna componente di $S \setminus \bar{S}$ sia un disco. Sia $\eta : MCG(\bar{S}) \rightarrow MCG(S)$ la mappa indotta dall'inclusione. Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ le componenti di bordo di \bar{S} che bordano dischi con una puntura in $S \setminus \bar{S}$ e $\{\beta_1, \gamma_1\}, \dots, \{\beta_n, \gamma_n\}$ le coppie di componenti di bordo in \bar{S} che bordano anelli in $S \setminus \bar{S}$. Allora si ha:*

$$Ker(\eta) = \langle T_{\alpha_1}, \dots, T_{\alpha_m}, T_{\beta_1} \circ T_{\gamma_1}^{-1}, \dots, T_{\beta_n} \circ T_{\gamma_n}^{-1} \rangle.$$

Per una dimostrazione di questo lemma si rimanda a [1].

Proposizione 5.23. *Sia S una superficie con $\chi(S) \leq -2$ e a una classe di isotopia orientata di curve semplici chiuse che non sconnettono. Allora, nelle notazioni precedenti, fissato $\alpha \in a$, si ha una successione esatta:*

$$1 \rightarrow \langle T_a \rangle \rightarrow MCG(S, \alpha) \xrightarrow{\zeta} MCG(S \setminus \alpha).$$

Inoltre la restrizione di ζ a $PMCG(S, \alpha)$ è surgettiva su $PMCG(S \setminus \alpha)$.

Dimostrazione. Dimostriamo che ζ esiste ed è ben definito. Consideriamo un intorno tubolare aperto N di α in S . L'inclusione $S \setminus N \subset S$ induce un omomorfismo $\eta_1 : MCG(S \setminus N) \rightarrow MCG(S)$ il cui nucleo K_1 è generato da $T_{\alpha^+} \circ T_{\alpha^-}^{-1}$ dove con α^+ e α^- indichiamo le due componenti di bordo di N che sono isotope ad α in S . Osserviamo che la mappa η_1 è surgettiva su $MCG(S, \alpha)$.

Indichiamo invece con $\overline{S \setminus N}$ la superficie che si ottiene tappando le due componenti di bordo associate ad N con due dischi con una puntura. C'è un naturale omeomorfismo tra $\overline{S \setminus N}$ e $S \setminus \alpha$ e quindi un isomorfismo $\tau : MCG(\overline{S \setminus N}) \rightarrow MCG(S \setminus \alpha)$.

Per la proposizione 5.20 abbiamo un omomorfismo $\eta_2 : MCG(S \setminus N) \rightarrow MCG(\overline{S \setminus N})$ il cui nucleo K_2 è generato da T_{α^+} e T_{α^-} .

Si ha allora il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} & & K_1 & & \\ & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & K_2 & \longrightarrow & MCG(S \setminus N) \xrightarrow{\eta_2} MCG(\overline{S \setminus N}) \\ & & \downarrow \eta_1 & & \downarrow \tau \\ & & MCG(S, \alpha) & \longrightarrow & MCG(S \setminus \alpha) \\ & & \downarrow & & \\ & & 1 & & . \end{array}$$

Poiché $K_1 < K_2$, è ben definito l'omomorfismo $\tau \circ \eta_2 \circ \eta_1^{-1}$, che definisce ζ , e il cui Ker è esattamente T_a .

Per dimostrare la surgettività di ζ ristretta a $PMCG(S, \alpha)$ consideriamo la superficie S_α ottenuta tagliando S lungo α ; S_α ha due componenti di bordo in più di S , che indichiamo con B e C , e le cui classi di isotopia indichiamo rispettivamente con b e c . Inoltre indichiamo con S' la superficie ottenuta incollando un disco con una puntura su B in S_α , e con S'' quella ottenuta applicando un disco con una puntura su C in S' .

In queste notazioni si hanno le due successioni esatte:

$$1 \longrightarrow \langle T_b \rangle \longrightarrow PMCG(S_\alpha) \longrightarrow PMCG(S') \longrightarrow 1$$

e

$$1 \longrightarrow \langle T_c \rangle \longrightarrow PMCG(S') \longrightarrow PMCG(S'') \longrightarrow 1.$$

Evidentemente tra $PMCG(S \setminus \alpha)$ e $PMCG(S'')$ c'è un isomorfismo naturale. Sappiamo quindi che per ogni elemento in $PMCG(S \setminus \alpha)$ esiste una mapping class in $PMCG(S_\alpha)$ che la induce e basta considerare l'elemento di $PMCG(S)$ ad essa associato per avere la tesi. \square

Lemma 5.24. *Supponiamo che un gruppo G agisca su un complesso simpliciale X connesso di dimensione 1 tramite automorfismi simpliciali. Supponiamo inoltre che l'azione di G sia transitiva sui vertici e sulle coppie di vertici connesse da un arco. Allora, considerati due vertici v e w connessi da un arco e $h \in G$ tale che $h(w) = v$, si ha che il gruppo G è generato da h e dallo stabilizzatore di v in G .*

Dimostrazione. La dimostrazione avverrà per induzione. Dato $g \in G$, per la connessione di X possiamo trovare una sequenza $v = v_0, \dots, v_k = g(v)$ tali che la coppia (v_i, v_{i+1}) è connessa da un arco per ogni j . Possiamo anche supporre, essendo l'azione di G transitiva sui vertici di X , che $v_i = g_i(v)$, con $g_0 = id$ e $g_k = g$.

Indichiamo con $H < G$ il sottogruppo generato da h e $Stab(v)$ e dimostriamo per induzione che $g_i \in H$.

Ovviamente $g_0 \in H$. Supponiamo allora $g_i \in H$: applicando g_i^{-1} ai vertici $g_i(v)$ e $g_{i+1}(v)$ otteniamo un arco tra v e $g_i^{-1}g_{i+1}(v)$ e poiché G agisce transitivamente sulle coppie di vertici connessi da archi esiste $r \in G$ che manda la coppia $(v, g_i^{-1}g_{i+1}(v))$ nella coppia (v, w) .

Più precisamente avremo che $rg_i^{-1}g_{i+1}(v) = w$ e quindi $hrg_i^{-1}g_{i+1}(v) = v$, ossia $hrg_i^{-1}g_{i+1} \in Stab(v) \subset H$. Si ha la tesi osservando che $h \in H$ per definizione, che $r \in Stab(v) \subset (H)$ poiché $r(v) = v$, e che $g_i \in H$ per ipotesi induttiva. \square

Questo lemma ci sarà utile perché nel nostro caso $MCG(S)$ agisce come da ipotesi su $\hat{N}(S)$, dato che gli omeomorfismi mantengono il numero di intersezione geometrico e mandano curve non separanti in curve non separanti e per il principio di cambio di coordinate agiscono transitivamente sulle coppie di vertici connessi da un arco in $\hat{N}(S)$.

5.2.2 Dimostrazione del teorema

Lemma 5.25. *Il gruppo fondamentale di una superficie di genere positivo è finitamente generato dalle classi di curve chiuse semplici essenziali e non separanti.*

Dimostrazione. (Traccia) Possiamo limitarci a dimostrarlo per superfici senza bordo, perché in omotopia una componente di bordo è equivalente ad una puntura. La superficie $S_{g,n}$ si può ottenere come quoziente di un $4g$ -gono con n punture (per il toro è un fatto noto, per le superfici di genere maggiore questa costruzione fa parte della dimostrazione del teorema 1.16, quindi si rimanda a [2] e [19]) e possiamo considerare come generatori del $\pi_1(S_{g,n})$ le $2g$ curve chiuse $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ su cui si sono quozientati i lati del $4g$ -gono e le n curve $\delta_1, \dots, \delta_n$ intorno alle punture. Le prime sono essenziali, semplici e non separanti, mentre le seconde sono per definizione non essenziali. Basta considerare però le curve $\gamma_1\delta_1, \dots, \gamma_1\delta_n$: si verifica facilmente che sono essenziali e non separanti, ed è sufficiente quindi considerare dei rappresentanti semplici nelle loro classi di omotopia per avere la tesi. \square

Osservazione 5.26. Se consideriamo come generatori del primo gruppo di omologia del toro le due curve in figura 5.6, abbiamo che i twist a loro associati sono esattamente le immagini dei generatori di $SL(2, \mathbb{Z})$, che sono le matrici $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, tramite l'isomorfismo della proposizione 3.8.

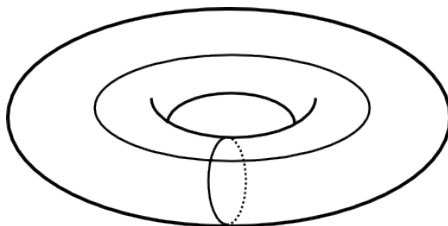


Figura 5.6

Nel caso del toro con una puntura si ha $H_1(S_{1,1}, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}^2$, poiché esso si retrae per deformazione su un wedge di due circonferenze, e in modo analogo al caso del toro si dimostra che $MCG(S_{1,1}) \approx SL(2, \mathbb{Z})$. Fissate le due curve della figura 5.6 come generatori di $H_1(S_{1,1}, \mathbb{Z})$ si ha che anche in questo caso i twist di Dehn ad esse associati generano $PMCG(S_{1,1}) = MCG(S_{1,1})$.

Teorema 5.27. *$PMCG(S_{g,n})$ è finitamente generato dai twist di Dehn intorno a curve non separanti per $g \geq 1$ e $n \geq 0$.*

Dimostrazione. Come già accennato, la dimostrazione si basa su una doppia induzione, con passi base il toro \mathbb{T}^2 e il toro con una puntura $S_{1,1}$.

Affrontiamo prima l'induzione sul numero di punture. Supponiamo $g \geq 1$ e $n \geq 0$ e dimostriamo che $PMCG(S_{g,n+1})$ è finitamente generato dai twist di Dehn intorno a curve

semplici chiuse non separanti.

Si ha la successione di Birman:

$$1 \longrightarrow \pi_1(S_{g,n}) \longrightarrow \text{PMCG}(S_{g,n+1}) \longrightarrow \text{PMCG}(S_{g,n}) \longrightarrow 1.$$

Sappiamo che $\pi_1(S_{g,n})$ è finitamente generato da curve non separanti, e che l'immagine di ognuna di queste curve tramite la mappa $Push$ è composizione di due twist di Dehn intorno a curve non separanti. Basta considerare singolarmente tutte queste curve per avere un insieme finito di generatori per $Push(\pi_1(S_{g,n}))$.

Inoltre grazie all'ipotesi induttiva sappiamo anche che $\text{PMCG}(S_{g,n})$ è finitamente generato dai twist di Dehn intorno a curve non separanti. Poiché la successione di Birman è esatta, si ha che $\text{PMCG}(S_{g,n}) \approx \frac{\text{PMCG}(S_{g,n+1})}{Push(\pi_1(S_{g,n}))}$ e quindi anche $\text{PMCG}(S_{g,n+1})$ è finitamente generato. L'ultima cosa da osservare è che per ogni twist di Dehn che genera $\text{PMCG}(S_{g,n})$ possiamo considerare nella preimmagine esattamente il twist di Dehn intorno alla stessa curva in $S_{g,n+1}$, che continua ad essere una curve non separante.

Passiamo ora all'induzione sul genere. Osserviamo che per il principio di cambio di coordinate il mapping class group agisce come da ipotesi del lemma 5.24 su $\hat{N}(S_{g+1})$ e quindi fissate due classi di isotopia non orientata a e b di curve semplici chiuse non separanti con $i(a,b) = 1$ sappiamo che $\text{MCG}(S_{g+1})$ è generato dallo stabilizzatore di a , che indichiamo con $\text{MCG}(S_{g+1}, a)$ e da una mapping class che manda b in a , ad esempio $T_b \circ T_a$.

Ci siamo ridotti a dimostrare che $\text{MCG}(S_{g+1}, a)$ è finitamente generato da twist di Dehn intorno a curve non separanti. Indichiamo con $\text{MCG}(S_{g+1}, \vec{a})$ il sottogruppo formato dagli elementi di $\text{MCG}(S_{g+1}, a)$ che preservano l'orientazione di a . Si ha una successione esatta corta:

$$1 \longrightarrow \text{MCG}(S_{g+1}, \vec{a}) \longrightarrow \text{MCG}(S_{g+1}, a) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1.$$

Poiché $T_b \circ T_a^2 \circ T_b$ inverte l'orientazione di a sappiamo che rappresenta la classe laterale non banale di $\text{MCG}(S_{g+1}, \vec{a})$ in $\text{MCG}(S_{g+1}, a)$ e quindi ci basta dimostrare il risultato per $\text{MCG}(S_{g+1}, \vec{a})$. Per la proposizione 5.23 si ha la successione esatta:

$$1 \longrightarrow \langle T_a \rangle \longrightarrow \text{MCG}(S_{g+1}, \vec{a}) \longrightarrow \text{PMCG}(S_{g+1} \setminus \alpha) \longrightarrow 1$$

con $\alpha \in a$. Poiché $S_{g+1} \setminus \alpha$ è omeomorfo a $S_{g,2}$ sappiamo per ipotesi induttiva che il suo mapping class group puro è generato da finiti twist di Dehn intorno a curve non separanti. Poiché ognuno di questi twist ha un elemento nella controimmagine che è ancora un twist di Dehn intorno ad una curva non separante si conclude. \square

Osservazione 5.28. Per ottenere il teorema 5.1 basta considerare il caso $n = 0$.

5.3 Generatori espliciti e caso generale

Nel 1964 Lickorish [13] ha dimostrato che un sistema di generatori per $MCG(S_g)$ è fornito dai twist di Dehn intorno alle $3g - 1$ curve in figura 5.7:

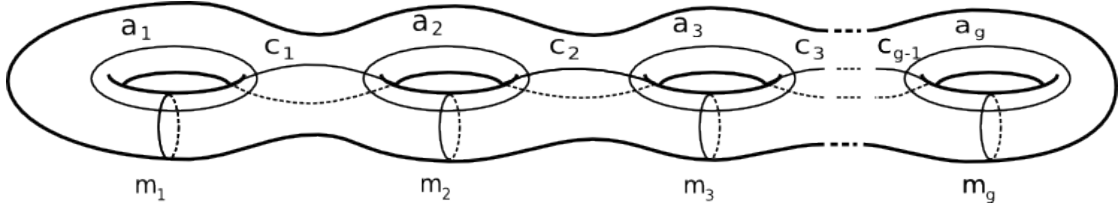


Figura 5.7

Definizione 5.29. Una sequenza di classi di isotopia di curve c_1, \dots, c_k è detta *catena* se $i(c_i, c_{i+1}) = 1$ per ogni i e $i(c_i, c_j) = 0$ se $|i - j| > 1$.

Supponiamo di avere una catena c_1, \dots, c_k e consideriamone dei rappresentanti in posizione minimale. Sia U un'unione di intorni tubolari chiusi delle curve della catena. Se k è pari, allora ∂U è connesso e, indicata con d la sua classe di isotopia, si ha:

$$(T_{c_1} \circ \dots \circ T_{c_k})^{2k+2} = T_d.$$

Se k è dispari, indicate con d_1 e d_2 le classi di isotopia delle due componenti di bordo, si ha:

$$(T_{c_1} \circ \dots \circ T_{c_k})^{k+1} = T_{d_1} \circ T_{d_2}.$$

Per trovare una dimostrazione di questo risultato si veda [1].

Proposizione 5.30. *I twist di Lickorish generano $MCG(S_g)$.*

Dimostrazione. (Traccia) La dimostrazione consiste in un'induzione sul genere della superficie, con caso base dato da $MCG(\mathbb{T}^2)$, nel quale i generatori considerati nella sezione precedente sono esattamente i twist di Lickorish. Il passo induttivo si struttura in modo analogo a quanto già fatto per il teorema di Dehn-Lickorish. Consideriamo la mapping class $T_{a_1} \circ T_{m_1}^2$ che manda la classe di isotopia a_1 in m_1 ; sappiamo allora per il lemma 5.24 che $MCG(S_g)$ è generato da $T_{a_1} \circ T_{m_1}$ e da $MCG(S_g, m_1)$, lo stabilizzatore di m_1 . Nelle stesse notazioni del teorema di Dehn-Lickorish si ha la successione esatta:

$$1 \longrightarrow MCG(S_g, \vec{m}_1) \longrightarrow MCG(S_g, m_1) \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \longrightarrow 1$$

e poiché l'elemento $T_{a_1} \circ T_{m_1}^2 \circ T_{a_1}$ rappresenta la classe laterale non banale di $MCG(S_g, \vec{m}_1)$ in $MCG(S_g, m_1)$ ci basta dimostrare che lo stabilizzatore della classe di isotopia orientata di m_1 è generato dai twist di Lickorish. Si ha inoltre:

$$1 \longrightarrow \langle T_{m_1} \rangle \longrightarrow MCG(S_g, \vec{m}_1) \longrightarrow PMCG(S_g \setminus m_1) \longrightarrow 1$$

e quindi ci siamo ricondotti a lavorare con $MCG(S_g \setminus m_1) \approx MCG(S_{g-1,2})$.

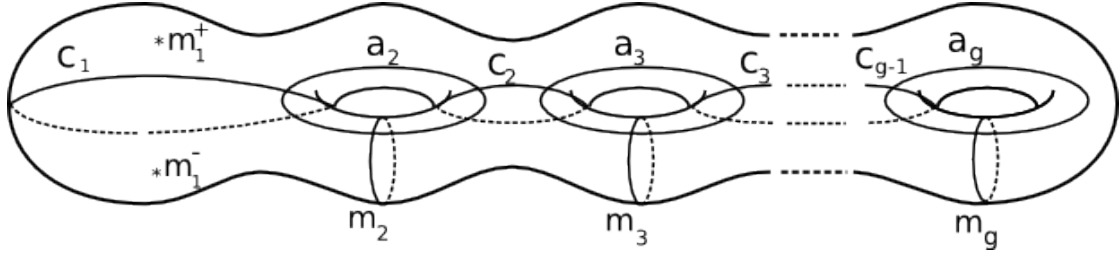


Figura 5.8

Per semplicità di notazione in questo contesto indicheremo d'ora in avanti $S_g \setminus m_1$ con S_{m_1} , e con S'_{m_1} e S''_{m_1} rispettivamente le superfici ottenute dimenticando la puntura m_1^- e dimenticandole entrambe. Applicando due volte la successione esatta di Birman si hanno le successioni:

$$1 \longrightarrow \pi_1(S'_{m_1}, m_1^-) \xrightarrow{Push} PMCG(S_{m_1}) \longrightarrow MCG(S'_{m_1}) \longrightarrow 1$$

e

$$1 \longrightarrow \pi_1(S''_{m_1}, m_1^+) \xrightarrow{Push'} PMCG(S'_{m_1}) \longrightarrow MCG(S''_{m_1}) \longrightarrow 1$$

Poiché $S''_{m_1} \approx S_{g-1}$ sappiamo per ipotesi induttiva che $MCG(S''_{m_1})$ è generato dai twist intorno alle curve $a_2, c_2, m_2, \dots, a_g, c_{g-1}, m_g$. Inoltre questi twist generano anche $Push(\pi_1(S'_{m_1}, m_1^-))$. Per verificarlo consideriamo l'insieme standard di generatori per il $\pi_1(S''_{m_1}, m_1^-)$, due dei quali sono disegnati in figura 5.9.

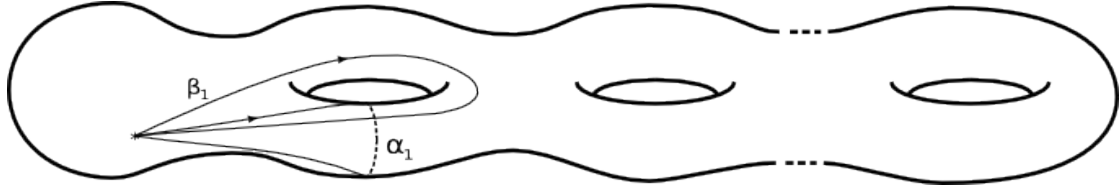


Figura 5.9

Si verifica facilmente che $Push'(\alpha_1) = T_{c_1} \circ T_{m_2}^{-1}$ e quindi è generato dai twist di Lickorish. Inoltre si ha che $T_{m_2} \circ T_{a_2}(\alpha_1) = \beta_1$ e quindi per l'osservazione 5.19 $Push'(\beta_1)$ è coniugato a $Push'(\alpha_1)$ tramite twist di Lickorish, e quindi anche esso ne è un loro prodotto.

Con un ragionamento di questo tipo si riesce a dimostrare che sia $Push'(\pi_1(S''_{m_1}, m_1^-))$ che $Push(\pi_1(S'_{m_1}, m_1^-))$ sono generati dai twist di Lickorish e in questi ultimi passaggi interviene la relazione di intreccio per catene appena citata. \square

Nel 1979 Humphries [14] ha dimostrato inoltre che il numero minimale di generatori per $MCG(S_g)$ è $2g + 1$, trovandone un insieme esplicito, presentato in figura 5.10.

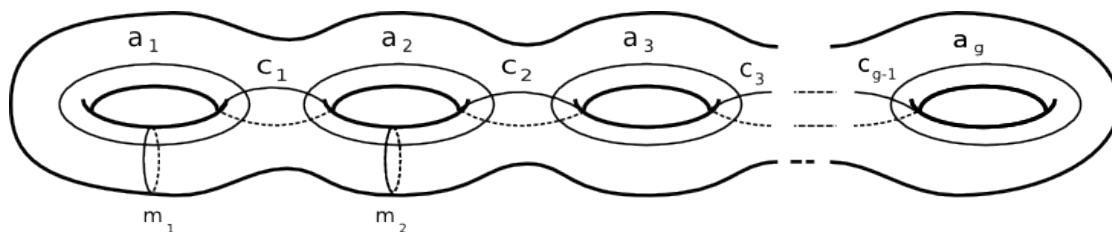


Figura 5.10

E per quanto riguarda le superfici con punture e componenti di bordo qual è la situazione? Abbiamo già osservato che naturalmente i twist di Dehn non permutando le punture di una superficie non possono generarne l'intero mapping class group. Tuttavia si ha la seguente successione esatta:

$$1 \longrightarrow \text{PMCG}(S_{g,n}) \longrightarrow \text{MCG}(S_{g,n}) \longrightarrow \Sigma_n \longrightarrow 1$$

dove con Σ_n intendiamo il gruppo delle permutazioni di n elementi, e dove la mappa $\text{MCG}(S_{g,n}) \longrightarrow \Sigma_n$ è indotta in modo naturale dall'azione del mapping class group sull'insieme delle punture. L'unica cosa da verificare in questa successione è che questa mappa sia surgettiva.

Fissate due punture, consideriamo un loro intorno chiuso omeomorfo ad un disco e applichiamo all'interno dell'intorno la trasformazione suggerita in figura:

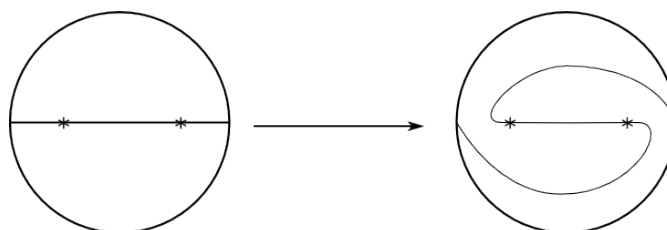


Figura 5.11: Un half twist

Sostanzialmente questa trasformazione scambia le due punture e lascia fisso il bordo, in modo da poter essere estesa come l'identità in modo continuo sul resto della superficie. Questa trasformazione prende il nome di *half twist*. Poiché le trasposizioni generano Σ_n allora si ha che $\text{MCG}(S_{g,n})$ è generato da finiti twist di Dehn intorno a curve non separanti e da finiti half twist.

Se invece la superficie ha componenti di bordo possiamo sostituire tutte le componenti di bordo con punture, e aggiungere le componenti di bordo iterativamente, utilizzando la successione esatta della proposizione 5.20. In questo modo si riesce a generare il mapping

class group di una superficie con bordo con finiti twist di Dehn intorno a curve non separanti e intorno alle componenti di bordo e finiti half twist.

Bibliografia

- [1] Benson Farb, Dan Margalit. *A Primer on Mapping Class Group*. Princeton University Press, 2011.
- [2] Bruno Martelli. *An introduction to Geometric Topology*. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2016.
- [3] Carsten Thomassen. *The Jordan-Schonflies theorem and the classification of surfaces*. American Mathematical Monthly, 99(2):116–130, 1992.
- [4] Robion C. Kirby, Laurence C. Siebenmann. *Foundational Essays on Topological Manifolds, Smoothings and Triangulations*. Princeton University Press, 1977.
- [5] Morris W. Hirsch. *Differential topology*. Volume 33 della serie Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [6] D. B. A. Epstein. *Curves on 2-manifolds and isotopies*. Acta Mathematica, 115:83–107, 1966.
- [7] Allen Hatcher. *The Kirby Torus Trick for Surfaces*. Disponibile sul sito dell'autore www.math.cornell.edu/hatcher/Papers.
- [8] David Bortwhik. *Spectral theory of infinite-area hyperbolic surfaces*. Springer, 2016
- [9] Marco Manetti. *Topologia*. Springer, 2014
- [10] Dale Rolfsen. *Knots and Links*. AMS Chelsea Publishing, 2003.
- [11] Antoni A. Kosinski. *Differential Manifolds*. Dover Books on Mathematics, 2007.
- [12] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [13] W. B. R. Lickorish. *A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold*. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 60:769–778, 1964.
- [14] Stephen P. Humphries. *Generators for the mapping class group*. Topology of low-dimensional manifolds (Proc. Second Sussex Conf., Chelwood Gate, 1977), volume 722 di Lecture Notes in Math., pagine 44–47. Springer, Berlin, 1979.

- [15] Mary-Elizabeth Hamstrom. *Some global properties of the space of homeomorphisms on a disc with holes*. Duke Mathematical Journal, 29:657–662, 1962.
- [16] Mary-Elizabeth Hamstrom. *The space of homeomorphisms on a torus*. Illinois Journal of Mathematics, 9:59–65, 1965.
- [17] Mary-Elizabeth Hamstrom. *Homotopy groups of the space of homeomorphisms on a 2-manifold*. Illinois Journal of Mathematics, 10:563–573, 1966.
- [18] Nikolai V. Ivanov. *Mapping class groups*. In Handbook of geometric topology, pagine 523–633. North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [19] Riccardo Benedetti, Carlo Petronio. *Lectures on Hyperbolic Geometry*. Springer-Verlag, 1992.